

Вероятностная оценка вертикальных динамических сил, действующих на путь, в модели трехслойной балки при воздействии четырехосного грузового вагона

С. В. МИХАЙЛОВ, М. М. ГОНИК

Акционерное общество «Научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта» (АО «ВНИИЖТ»), Москва, 129626, Россия

Аннотация. Приведен способ определения матрицы взаимных спектральных плотностей вертикальных динамических сил, действующих на железнодорожный путь в зависимости от спектра его неровностей. Этот способ позволит сделать более точный расчет средних значений и среднеквадратических отклонений вертикальных динамических сил, а также таких характеристик верхнего строения пути, как прогибы, углы поворота сечений, изгибающие моменты, поперечные силы, напряжения его трехслойной конструкции. Для расчетов используется математическая модель колебаний пути как конструкции, содержащей три бесконечно длинные балки, нижняя из которых лежит на модифицированном основании Винклера. Полученные статистические оценки могут быть использованы при расчетах срока службы безбалластных конструкций пути и нагрузки на земляное полотно.

Ключевые слова: вертикальные динамические силы; спектральная плотность; прогибы; моделирование; модель трехслойной балки; неровности пути

Введение. В современных условиях развитие высокоскоростного [1, 2, 3] и тяжеловесного [4, 5] движения является крайне актуальным для железнодорожного транспорта нашей страны. В связи с этим особое значение приобретает проблема выбора конструкций пути и проведения мониторинга его состояния. Поведение данных конструкций существенно различается в зависимости от характеристик пути, типа движения, климатических условий. Однако проведение исследований при помощи натурных экспериментов зачастую приводит к существенным временным и финансовым затратам, в связи с чем растет потребность в использовании математического моделирования. Одной из известных является модель колебаний пути как конструкции, содержащей три бесконечно длинные балки. Она позволяет провести оценку средних значений и среднеквадратических отклонений различных показателей, характеризующих напряженно-деформированное состояние пути.

В настоящее время расчеты, проведенные с использованием данной модели, применяются при определении срока службы безбалластных конструк-

ций пути [6, 7, 8, 9], а также при разработке технологии сейсмического мониторинга, экспресс-оценке состояния земляного полотна железнодорожных путей в условиях Крайнего Севера и Сибири. Выполнение расчетов требует определения матрицы взаимных спектральных плотностей динамических вертикальных сил S_Q , действующих на путь, для нахождения точного значения компонентов которой необходимо проведение испытаний с использованием не менее 4-х тензометрических колесных пар при различных скоростях движения вагона. Альтернативным способом является нахождение матрицы S_Q при помощи программы ВЭИП [10], однако заложенный в ней алгоритм расчета реализован для модели однослойной балки, в связи с чем полученные результаты являются приближительными.

В работе приводится способ определения матрицы S_Q в зависимости от неровностей пути и характеристик трехслойной балки, а также дан пример ее нахождения для модели четырехосного вагона.

Модель колебаний пути. В математической модели железнодорожный путь рассматривается как конструкция, содержащая три бесконечно длинные балки, нижняя из которых лежит на модифицированном основании Винклера [11, 12], а на верхнюю действует переменная динамическая нагрузка $Q(t)$. Система дифференциальных уравнений для данной модели имеет следующий вид [12, 13]:

$$\begin{cases} E_1 I_1 \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + f_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial t} \right) + U_1 (z_1 - z_2) = 0; \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + f_1 \left(\frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\partial z_1}{\partial t} \right) + f_2 \left(\frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\partial z_3}{\partial t} \right) + \\ + U_1 (z_2 - z_1) + U_2 (z_2 - z_3) = 0; \\ E_3 I_3 \frac{\partial^4 z_3}{\partial x^4} + m_3 \frac{\partial^2 z_3}{\partial t^2} + f_2 \left(\frac{\partial z_3}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial t} \right) + f_3 \frac{\partial z_3}{\partial t} + \\ + U_2 (z_3 - z_2) + U_3 z_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

■ E-mail: mikhailov.sergey@vniizht.ru (С. В. Михайлов)

где E_i — модуль упругости материала i -го слоя при $i = \overline{1,3}$; I_i — момент инерции i -го слоя при его изгибе относительно поперечной горизонтальной оси, отнесенный к одной рельсовой нити; m_i — распределенная приведенная масса i -го слоя, отнесенная к одной рельсовой нити; f_i — распределенное приведенное демпфирование i -го слоя, отнесенное к одной рельсовой нити; U_i — приведенный модуль упругости основания i -го слоя при вертикальном изгибе, отнесенный к одной рельсовой нити; z_i — вертикальный прогиб i -го слоя в подрельсовом сечении; x — абсцисса текущего сечения балки, отсчитываемая от некоторого неподвижного начала координат; t — время.

Делаем замену $z_i = e^{i\omega t} W_{z_i}^Q(u, i\omega)$, $u = x - vt$, где v — скорость движения переменной нагрузки; ω — частота колебаний; u — абсцисса текущего сечения балки, отсчитываемая от начала координат, совмещенного с движущейся нагрузкой.

Решаем систему (1) с учетом краевых условий, приведенных в [7], для нахождения $W_{z_i}^Q(u, i\omega)$ — частотной характеристики, которая связывает прогиб i -го слоя в сечении, удаленном от действующей силы $Q(t)$ на расстоянии u . Преобразованная система дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами приводится в [6, 12, 14].

Средняя величина векторов прогибов $\langle z_i \rangle$ под действием вектора нагрузки $Q(t)$ находится по формулам [6, 13]

$$\langle z_i \rangle = W_{z_i}^Q(0) \langle Q \rangle; i = \overline{1,3} \quad (2)$$

где $W_{z_i}^Q(i\omega)$ — операционная матрица системы уравнений, элементы которой определяются частотными характеристиками $W_{z_i}^Q(u, i\omega)$; $\langle Q \rangle$ — вектор-столбец средних значений вертикальных сил Q .

Среднеквадратическое отклонение величин прогибов от их средних значений определяется диагональными членами матрицы спектральных плотностей прогибов слоев балки [12, 15]:

$$\sigma_{z_i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty S_{z_i, j}(\omega) d\omega \right), \quad (3)$$

где $n \times n$ — размерность матрицы спектральных плотностей прогибов i -го слоя $S_{z_i}(\omega)$,

$$S_{z_i}(\omega) = \overline{W_{z_i}^Q}(\omega) S_Q(\omega) W_{z_i}^{Q^T}(\omega), \quad (4)$$

где $\overline{W_{z_i}^Q}(\omega)$ — матрица, комплексно сопряженная с матрицей $W_{z_i}^Q(i\omega)$, а $W_{z_i}^{Q^T}(\omega)$ — матрица, транспонированная по отношению к $W_{z_i}^Q(i\omega)$; $S_Q(\omega)$ — матрица спектральных плотностей процесса изменения динамических сил в контактах колес экипажа и рельса.

Для четырехосного вагона имеем $n = 4$

$$W_{z_i}^Q = \begin{pmatrix} W_{z_i 11}^Q & W_{z_i 12}^Q & W_{z_i 13}^Q & W_{z_i 14}^Q \\ W_{z_i 21}^Q & W_{z_i 22}^Q & W_{z_i 23}^Q & W_{z_i 24}^Q \\ W_{z_i 31}^Q & W_{z_i 32}^Q & W_{z_i 33}^Q & W_{z_i 34}^Q \\ W_{z_i 41}^Q & W_{z_i 42}^Q & W_{z_i 43}^Q & W_{z_i 44}^Q \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Элементы матрицы имеют следующий вид:

$$W_{z_i 11}^Q = W_{z_i 22}^Q = W_{z_i 33}^Q = W_{z_i 44}^Q = W_{z_i}^Q(0, i\omega);$$

$$W_{z_i 21}^Q = W_{z_i 43}^Q = W_{z_i}^Q(d, i\omega);$$

$$W_{z_i 31}^Q = W_{z_i 42}^Q = W_{z_i}^Q(l, i\omega);$$

$$W_{z_i 41}^Q = W_{z_i}^Q(l + d, i\omega);$$

$$W_{z_i 32}^Q = W_{z_i}^Q(l - d, i\omega);$$

$$W_{z_i 12}^Q = W_{z_i 34}^Q = W_{z_i}^Q(-d, i\omega);$$

$$W_{z_i 13}^Q = W_{z_i 24}^Q = W_{z_i}^Q(-l, i\omega);$$

$$W_{z_i 14}^Q = W_{z_i}^Q(-l - d, i\omega);$$

$$W_{z_i 23}^Q = W_{z_i}^Q(d - l, i\omega),$$

где d — расстояние между колесными парами; l — расстояние между центрами тележек.

Нахождение матрицы S_Q для модели трехслойной балки. Для нахождения среднеквадратического отклонения величин прогибов слоев от их средних значений в модели трехслойной балки необходимо найти матрицу взаимных спектральных плотностей вертикальных сил S_Q . Для этого найдем частотную матрицу, определяющую динамическую систему с входом по неровности пути и выходом по динамической силе в контакте колеса и рельса.

Из уравнения, связывающего компоненты вектора смещений колес с компонентами вектора прогибов рельса, имеем [13]

$$z_j(t) - z_{nj}^0(t) - \eta_j^0(t) = \xi_j^0(vt), \quad (6)$$

где $z_j(t)$ — смещение j -го колеса под нагрузкой $Q_{nj}(t)$; $z_{nj}^0(t)$ — местная деформация в точке контакта колеса и рельса, вызванная действием вертикальной нагрузки $Q_{nj}(t)$; $\eta_j^0(t)$ — контактная деформация в точке контакта колеса с рельсом; $\xi_j^0(vt)$ — неровность под j -м колесом.

$$\xi_j^0(vt) = \xi_p^0(a_j + vt) + \xi_n^0(a_j + vt) + \xi_{kj}^0(vt), \quad (7)$$

где $\xi_p^0(a_j + vt)$ — неровность на поверхности катания рельса; $\xi_n^0(a_j + vt)$ — неровность, обусловленная зазором между рельсом и основанием; $\xi_{kj}^0(vt)$ — неровность колеса; a_j — расстояние между j -м колесом и началом подвижной системы координат, движущейся вместе с экипажем с постоянной скоростью v .

Переходя к векторной записи (6) и с учетом равенств

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}^0(i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}_d; \quad (8)$$

$$\mathbf{z}_d^0(t) = \mathbf{W}_{z_1}^0(0, i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}_d; \quad (9)$$

$$\eta^0(t) = \frac{1}{C_k^0}\tilde{\mathbf{Q}}_d, \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ — фурье-образ прогиба $\mathbf{z}(t)$; $\mathbf{W}^0(i\omega)$ — частотная характеристика, связывающая вектор динамических сил в контактах колес и рельсов с вектором вертикальных смещений колесных центров; $\mathbf{W}_{z_1}^0$ — частотная характеристика прогибов 1-го слоя; C_k^0 — контактная жесткость пары колесо — рельс; $\tilde{\mathbf{Q}}_d$ — фурье-образ вектора динамических сил в контактах колес и рельса $\mathbf{Q}_d(t)$, получаем

$$\tilde{\mathbf{Q}}_d = \mathbf{W}_p(i\omega)\tilde{\xi}, \quad (11)$$

где $\tilde{\xi}$ — фурье-образ неровности $\xi(t)$;

$$\mathbf{W}_p(i\omega) = \left(\mathbf{W}^0(i\omega) - \mathbf{W}_{z_1}^0(0, i\omega) - \frac{1}{C_k^0}\mathbf{E} \right)^{-1}, \quad (12)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Матрица частотных характеристик $\mathbf{W}_p(i\omega)$ связывает вектор неровностей пути под всеми осями вагона Ξ с вектором вертикальных сил, возникающих при движении вагона по пути. Наряду с ней рассматривается частотная характеристика $\mathbf{W}_q(i\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\mathbf{W}_p(i\omega)$, определяющая вектор динамических сил при входном воздействии в виде вектора вторых производных

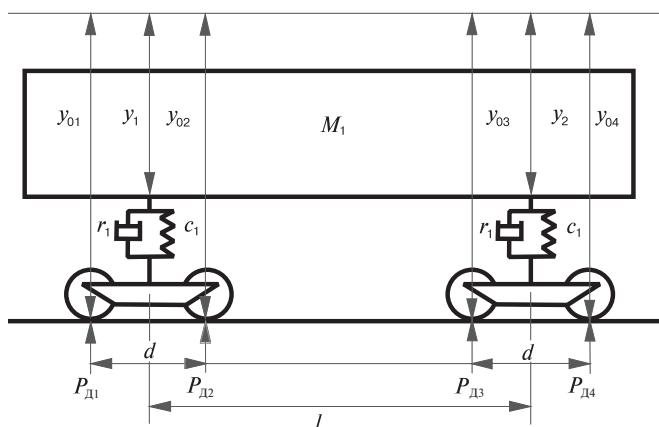


Рис. 1. Кинематическая схема четырехосного вагона:

M_1 — масса кузова; c_1 — жесткость; r_1 — демпфирование; $y_{01}, y_{02}, y_{03}, y_{04}$ — смещение колесных центров; y_1, y_2 — смещение центров тележки; $P_{д1}, P_{д2}, P_{д3}, P_{д4}$ — динамические силы в точке контакта колеса с рельсом; d — расстояние между колесными парами; l — расстояние между центрами тележек

Fig. 1. Kinematic scheme of a four-axle car:

M_1 — body weight; c_1 — stiffness; r_1 — damping; $y_{01}, y_{02}, y_{03}, y_{04}$ — displacement of wheel centers; y_1, y_2 — displacement of the bogie centers; $P_{д1}, P_{д2}, P_{д3}, P_{д4}$ — dynamic forces at the point of contact of wheel with rail; d — wheelbase; l — distance between the bogie centers

по времени от неровностей пути. Отсюда, пользуясь формулой, определяющей спектральную плотность процесса на выходе системы [16], находим матрицу спектральных плотностей вертикальных сил:

$$\mathbf{S}_Q = \overline{\mathbf{W}_p(i\omega)} \mathbf{S}_\Xi(\omega) \mathbf{W}_p(i\omega)^T, \quad (13)$$

где $\mathbf{S}_\Xi$ — матрица спектральных плотностей неровностей пути.

Матрица спектральных плотностей неровностей пути в первом приближении может быть найдена в следующем виде [12]:

$$\mathbf{S}_\Xi(\omega) = S_\xi(\omega)\mathbf{R} = vS_\xi(\Omega)\mathbf{R},$$

где $\Omega = \omega/v$; $S_\xi(\omega)$ — спектральная плотность неровностей как функция времени; $S_\xi(\Omega)$ — спектральная плотность неровностей как функция протяженности пути; $\mathbf{R}$ — осцилляционная матрица.

В частности, для четырехосного вагона имеем

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\Omega d} & e^{-i\Omega l} & e^{-i\Omega(l+d)} \\ e^{i\Omega d} & 1 & e^{i\Omega(d-l)} & e^{-i\Omega l} \\ e^{i\Omega l} & e^{i\Omega(l-d)} & 1 & e^{-i\Omega d} \\ e^{i\Omega(l+d)} & e^{i\Omega l} & e^{i\Omega d} & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Пример нахождения матрицы $\mathbf{S}_Q$ для модели четырехосного грузового вагона. Считая спектральную плотность неровностей пути $S_\xi(\omega)$ известной (находится по результатам обработки данных вагона-путеизмерителя или может быть аппроксимирована в зависимости от класса пути [17]), для нахождения матрицы $\mathbf{S}_Q$ необходимо найти частотную матрицу $\mathbf{W}_p(i\omega)$, которая, в свою очередь, требует нахождения частотных матриц $\mathbf{W}_{z_1}^0$ и $\mathbf{W}^0$. Для модели четырехосного грузового вагона частотная матрица $\mathbf{W}_{z_1}^0$ имеет вид (5) при $i=1$. Для нахождения матрицы $\mathbf{W}^0$ рассмотрим кинематическую схему вагона, представленную на рис. 1 [18].

Запишем обобщенные координаты системы [19]:

$$q_1 = y_1; \quad q_2 = y_2; \quad q_3 = \frac{y_{01} + y_{02}}{2};$$

$$q_4 = \frac{y_{01} - y_{02}}{d}; \quad q_5 = \frac{y_{03} + y_{04}}{2}; \quad q_6 = \frac{y_{03} - y_{04}}{d}$$

и обобщенные силы:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = 0; \quad Q_3 = -(P_{д1} + P_{д2});$$

$$Q_4 = -\frac{d}{2}(P_{д1} - P_{д2}); \quad Q_5 = -(P_{д3} + P_{д4});$$

$$Q_6 = -\frac{d}{2}(P_{д3} - P_{д4}).$$

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа второго рода для системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

где T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы; Φ — функция рассеивания энергии системы,

находим матрицу частотных характеристик:

$$\mathbf{W}^0(i\omega) = \begin{pmatrix} W_{11}^0(i\omega) & W_{12}^0(i\omega) & W_{13}^0(i\omega) & W_{14}^0(i\omega) \\ W_{21}^0(i\omega) & W_{22}^0(i\omega) & W_{23}^0(i\omega) & W_{24}^0(i\omega) \\ W_{31}^0(i\omega) & W_{32}^0(i\omega) & W_{33}^0(i\omega) & W_{34}^0(i\omega) \\ W_{41}^0(i\omega) & W_{42}^0(i\omega) & W_{43}^0(i\omega) & W_{44}^0(i\omega) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$W_{11}^0(i\omega) = W_{22}^0(i\omega) = W_{33}^0(i\omega) = W_{44}^0(i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2}(W^1 + W^2) + \frac{d^2}{4\omega^2 I_0};$$

$$W_{12}^0(i\omega) = W_{21}^0(i\omega) = W_{34}^0(i\omega) = W_{43}^0(i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2}(W^1 + W^2) - \frac{d^2}{4\omega^2 I_0};$$

$$W_{13}^0(i\omega) = W_{31}^0(i\omega) = W_{14}^0(i\omega) = W_{41}^0(i\omega) =$$

$$W_{23}^0(i\omega) = W_{32}^0(i\omega) = W_{24}^0(i\omega) = W_{42}^0(i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2}(W^1 - W^2).$$

$$W^1(i\omega) = \frac{W^{11}(i\omega)}{W^{12}(i\omega)}; \quad (16)$$

$$W^2(i\omega) = \frac{W^{21}(i\omega)}{W^{22}(i\omega)}; \quad (17)$$

$$W^{11}(i\omega) = \omega^2 M_1 - 2i\omega r_1 - 2c_1; \quad (18)$$

$$W^{12}(i\omega) = \omega^4 M_0 M_1 - ir_1(2M_0 + M_1)\omega^3 - c_1(2M_0 + M_1)\omega^2; \quad (19)$$

$$W^{21}(i\omega) = 4\omega^2 I_1 - 2i\omega r_1 l^2 - 2c_1 l^2; \quad (20)$$

$$W^{22}(i\omega) = 4\omega^4 M_0 I_1 - ir_1(2M_0 l^2 + 4I_1)\omega^3 - c_1(2M_0 l^2 + 4I_1)\omega^2, \quad (21)$$

где M_0 — масса тележки; I_0 — момент инерции тележки; I_1 — момент инерции кузова.

Отсюда, подставляя найденные частотные матрицы $\mathbf{W}_{\dot{q}_i}^0$ и $\mathbf{W}^0$ в (12) и пользуясь (13), находим матрицу взаимных спектральных плотностей динамических вертикальных сил $\mathbf{S}_Q$.

На рис. 2, 3 и 4 представлены амплитудно-частотные характеристики диагонального элемента $S_{Q11}(\omega)$ матрицы взаимных спектральных плотностей вертикальных динамических сил, $|W_{Q11}(\omega)|$, $|W_{p11}(\omega)|$ для вагона, дви-

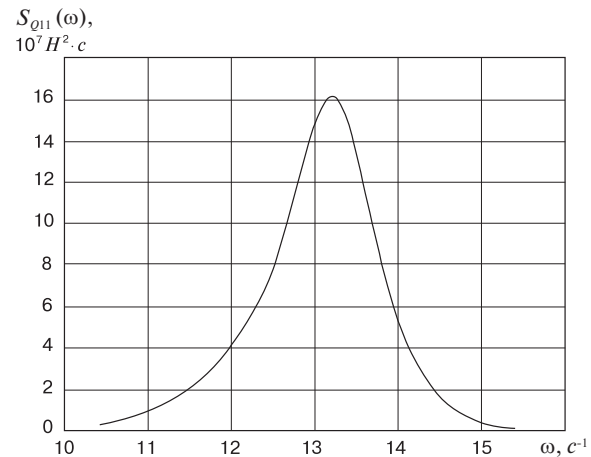


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика $S_{Q11}(\omega)$ при $10 \leq \omega \leq 16$

Fig. 2. Amplitude-frequency characteristic $S_{Q11}(\omega)$ при $10 \leq \omega \leq 16$

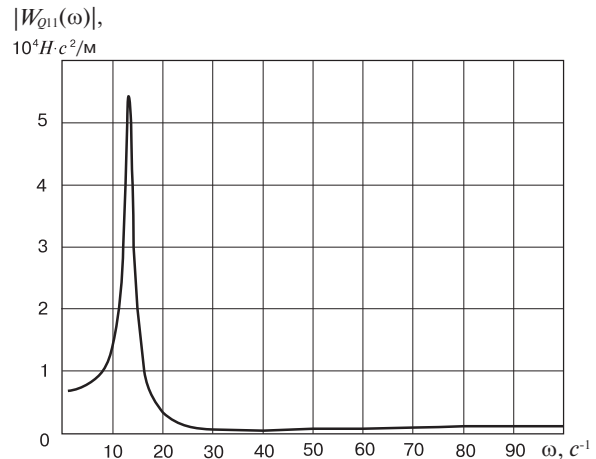


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика $|W_{Q11}(\omega)|$ при $0 \leq \omega \leq 100$

Fig. 3. Amplitude-frequency characteristic $|W_{Q11}(\omega)|$ при $0 \leq \omega \leq 100$

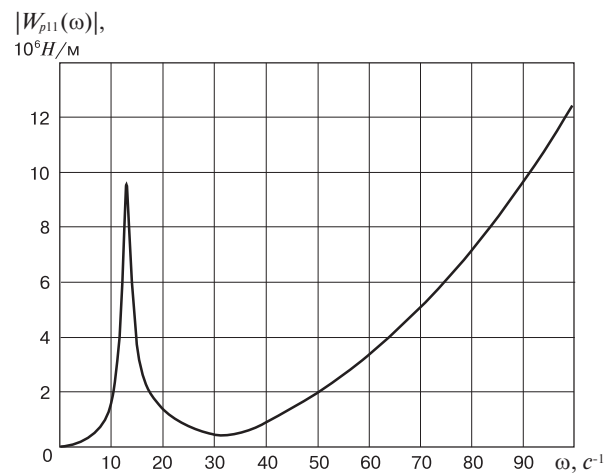


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика $|W_{p11}(\omega)|$ при $0 \leq \omega \leq 100$

Fig. 4. Amplitude-frequency characteristic $|W_{p11}(\omega)|$ при $0 \leq \omega \leq 100$

жущегося со скоростью 80 км/ч при параметрах пути, приведенных в [6, табл. 1].

Параметры вагона, а также спектральные плотности неровностей пути, использованные для расчета, приводятся в [18].

Выводы. 1. Представленные в статье результаты могут быть использованы для нахождения средних значений и среднеквадратических отклонений процессов, определяющих напряженно-деформированное состояние всех слоев конструкции пути.

2. Полученные средние значения и среднеквадратические отклонения позволяют уточнить расчет срока службы безбалластных конструкций пути и, соответственно, провести уточненную оценку экономической эффективности для их использования на сети железных дорог России.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Российского научного фонда № 17-20-02119 «Разработка технологии сейсмического мониторинга и экспресс-оценка состояния земляного полотна железнодорожных путей в условиях Крайнего Севера и Сибири».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мишарин А.С. Генеральная схема — основа устойчивого развития железнодорожного транспорта // Железнодорожный транспорт. 2016. № 5. С. 11–14.
2. Пехтерев Ф.С. С учетом прогнозов социально-экономического развития страны // Железнодорожный транспорт. 2016. № 5. С. 15–19.
3. Дыдышко П.И., Ольхина С.В. Основные положения проектирования земляного полотна высокоскоростных железнодорожных линий // Вестник ВНИИЖТ. 2017. Т. 76. № 6. С. 362–370. DOI: <http://dx.doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-6-362-370>.
4. Гапанович В.А. Вопросы взаимодействия подвижного состава и инфраструктуры при тяжеловесном движении // Железнодорожный транспорт. 2016. № 10. С. 10–15.
5. Мугинштейн Л.А. Некоторые проблемы обеспечения безопасности движения поездов повышенной массы и длины с распределенной тягой // Вопросы технического и технологического обеспечения безопасности движения поездов повышенной массы и длины: сб. трудов ВНИИЖТ / под ред. А. Е. Семечкина, Л. А. Мугинштейна. М.: Интекст, 2007. С. 5–9.
6. Коган А.Я., Савин А.В. Методика определения расчетного срока службы безбалластного пути // Вестник ВНИИЖТ. 2017.

Т. 76. № 1. С. 3–9. DOI: <http://dx.doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-1-3-9>.

7. Савин А.В. Выбор конструкции пути для высокоскоростного движения // Вестник ВНИИЖТ. 2014. № 1. С. 55–59.
8. Савин А.В., Разуваев А.Д. Сферы применения безбалластного пути // Техника железных дорог. 2016. № 3. С. 32–41.
9. Савин А.В. Итоги испытаний безбалластного пути // Техника железных дорог. 2017. № 1. С. 26–31.
10. Воздействие экипажа на путь при пространственных колебаниях подвижного состава: описание программы / А.Я. Коган [и др.] // Информационный бюллетень ВНИИ-Центр ГОСФАП. 1985. № 4/67. 40 с.
11. Барабошин В.Ф. Основные параметры новой конструкции пути метрополитенов с повышенными виброзащитными свойствами // Труды ВНИИЖТ. М.: Транспорт, 1981. Вып. 630. С. 26–53.
12. Коган А.Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М.: Транспорт, 1997. 326 с.
13. Курбацкий Е.Н. Оценка эффективности виброизолирующих устройств в железнодорожных тоннелях: П межвуз. сб. науч. тр. МИИТ. М., 1983. Вып. 720. С. 19–21.
14. Данович В.Д. Стационарные колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом основании, под действием движущейся гармонической нагрузки: межвуз. сб. науч. тр. ДИИТ. Днепропетровск, 1978. Вып. 199/25. С. 135–141.
15. Левин Б.Р. Теоретические основы статической радиотехники: в 3-х кн. Кн.1. М.: Сов. радио, 1974. 250 с.
16. Леннинг Дж.Х., Беттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 388 с.
17. Гарг В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава. М.: Транспорт, 1988. 392 с.
18. Коган А.Я., Крепогорский С.С., Шинкарев Б.С. Расчеты железнодорожного пути на вертикальную динамическую нагрузку // Труды ВНИИЖТ. М.: Транспорт, 1973. Вып. 502. 80 с.
19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

МИХАЙЛОВ Сергей Владимирович,
бизнес-аналитик центра математического моделирования,
АО «ВНИИЖТ»

ГОНИК Марк Михайлович,
канд. техн. наук, начальник центра математического
моделирования, АО «ВНИИЖТ»

Статья поступила в редакцию 01.12.2017 г., актуализирована
06.02.2018 г., принята к публикации 19.02.2018 г.

A probabilistic estimate of the vertical dynamic forces acting on the track, in the model of a three-layer beam under the influence of a four-axle freight car

S. V. MIKHAYLOV, M. M. GONIK

Joint Stock Company "Railway Research Institute" (JSC "VNIIZhT"), Moscow, 129626, Russia

Abstract. The article contains a method for determining the matrix of mutual spectral densities of vertical dynamic forces acting on a railway track, depending on its spectrum of irregularities. It will allow to make a more accurate calculation of the mean values and mean-square deviations of vertical dynamic forces, as well as such characteristics of

the permanent way as deflections, angles of section rotation, bending moments, transverse forces, stresses of its three-layer structures.

Mathematical model of track oscillations is used for calculations as a construction containing three infinitely long beams, the lower of which lies on the modified Winkler base.

Authors present formulas for finding amplitude-frequency characteristics connecting vertical deflections of structural layers and vertical dynamic load acting on a track.

A method is described for finding a matrix of mutual spectral densities of vertical dynamic forces acting on a track having real deviations from its position in the profile, with the passage through it of a four-axle freight car.

Considered example finds the amplitude-frequency characteristic that connects the vector of dynamic forces in the contacts of wheels and rails with the vector of vertical displacements of wheel centers for the model of a four-axle car. Concluding authors give the results of calculations of the amplitude-frequency characteristic of the elements of the matrix of mutual spectral densities of vertical dynamic forces acting on the track.

The received statistical estimations can be used at calculations of service life of ballastless track constructions and loading on roadbed.

This work was supported in part by grants of the Russian Science Foundation No. 17-20-02119 "Development of seismic monitoring technology and rapid assessment of the condition of the roadbed of tracks in the Far North and Siberia".

Keywords: vertical dynamic forces; spectral density; deflections; modeling; three-layer beam model; irregularities in the track

DOI: <http://dx.doi.org/10.21780/2223-9731-2018-77-2-98-103>

REFERENCES

1. Misharin A. S. *General'naya skhema — osnova ustoychivogo razvitiya zheleznodorozhnogo transporta* [The General Scheme is the basis for sustainable development of railway transport]. *Zheleznodorozhnyy transport*, 2016, no. 5, pp. 11–14.
2. Pekhterev F. S. *S uchetom prognozov sotsial'no-ekonomicheskogo razvitiya strany* [Taking into account the forecasts of the country's socio-economic development]. *Zheleznodorozhnyy transport*, 2016, no. 5, pp. 15–19.
3. Dydyshko P. I., Ol'khina S. V. *Osnovnye polozeniya proektirovaniya zemlyanogo polotna vysokoskorostnykh zheleznodorozhnykh liniy* [Basic provisions for the design of the roadbed for high-speed railway lines]. *Vestnik VNIIZhT* [Vestnik of the Railway Research Institute], 2017, Vol. 76, no. 6, pp. 362–370. DOI: <http://dx.doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-6-362-370>.
4. Gapanovich V. A. *Voprosy vzaimodeystviya podvizhnogo sostava i infrastruktury pri tyazhelovesnom dvizhenii* [Issues of the interaction of rolling stock and infrastructure under heavy haul operation]. *Zheleznodorozhnyy transport*, 2016, no. 10, pp. 10–15.
5. Muginshtein L. A., Semechkin A. E. *Nekotorye problemy obespecheniya bezopasnosti dvizheniya poezdov povyshennoy massy i dliny s raspredelennoy tyagoy* [Some problems of ensuring the safety of train movement of increased mass and length with distributed traction]. *Voprosy tekhnicheskogo i tekhnologicheskogo obespecheniya bezopasnosti dvizheniya poezdov povyshennoy massy i dliny*. Sb. trudov VNIIZhT [Issues of technical and technological security for the movement of trains of increased mass and length. Proc. of works of VNIIZhT], Moscow, Intext Publ., 2007, pp. 5–9.
6. Kogan A. Ya., Savin A. V. *Metodika opredeleniya raschetnogo sroka sluzhby bezballastnogo puti* [Method for determining design life of ballastless way]. *Vestnik VNIIZhT* [Vestnik of the Railway Research Institute], 2017, Vol. 76, no. 1, pp. 3–9. DOI: <http://dx.doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-1-3-9>.
7. Savin A. V. *Vybor konstruksii puti dlya vysokoskorostnogo dvizheniya* [Choosing a track design for high-speed traffic]. *Vestnik VNIIZhT* [Vestnik of the Railway Research Institute], 2014, no. 1, pp. 55–59.
8. Savin A. V., Razuvaev A. D. *Sfery primeneniya bezballastnogo puti* [Spheres of application of the ballast-free track]. *Tekhnika zheleznnykh dorog*, 2016, no. 3, pp. 32–41.
9. Savin A. V. *Itogi ispytaniy bezballastnogo puti* [Test results of the ballast-free track]. *Tekhnika zheleznnykh dorog*, 2017, no. 1, pp. 26–31.
10. Kogan A. Ya., Voytov I. O., Levinzon M. A., Gavrilo V. M., Perel'shtein A. L. *Vozdeystvie ekipazha na put' pri prostranstvennykh kolebaniyakh podvizhnogo sostava: opisanie programmy* [Impact of the carriage on the track with spatial variations of the rolling stock: description of the program]. *Informatsionnyy byulleten' VNTI-Tsentr GOSFAP* [Information bulletin VNTI-Center GOSFAP], 1985, no. 4/67, 40 p.
11. Baraboshin V. F. *Osnovnye parametry novoy konstruksii puti metropolitenov s povyshennymi vibrozashchitnymi svoystvami* [The main parameters of the new design of the metro routes with increased vibro-protective properties]. *Trudy VNIIZhT* [Proc. of the VNIIZhT]. Moscow, Transport Publ., 1981, no. 630, pp. 26–53.
12. Kogan A. Ya. *Dinamika puti i ego vzaimodeystvie s podvizhnym sostavom* [The dynamics of the track and its interaction with the rolling stock]. Moscow, Transport Publ., 1997, 326 p.
13. Kurbatskiy E. N. *Otsenka effektivnosti vibroizoliruyushchikh ustroystv v zheleznodorozhnykh tonnelyakh: II mezhvuz. sb. nauch. tr. MIIT* [Evaluation of the effectiveness of vibration isolation devices in railway tunnels: II interuniversity collection of scientific papers MIIT]. Moscow, 1983, no. 720, pp. 19–21.
14. Danovich V. D. *Statsionarnye kolebaniya beskonechno dlinnoy balki, lezhashchey na uprugom osnovanii, pod deystviem dvizhushchey garmonicheskoy nagruzki: mezhvuz. sb. nauch. tr. DIIT* [Stationary oscillations of an infinitely long beam lying on an elastic base, under the action of a moving harmonic load: the interuniversity collection of scientific papers DIIT]. Dnepropetrovsk, 1978, no. 199/25, pp. 135–141.
15. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy staticheskoy radiotekhniki: v 3-kh kn. Kn. 1*. [Theoretical foundations of static radio engineering: in 3 books. Book 1]. Moscow, Sov. radio Publ., 1974, 250 p.
16. Lenning J. H., Bettin R. G. *Sluchaynye protsessy v zadachakh avtomaticheskogo upravleniya* [Random processes in problems of automatic control]. Moscow, International Literature Publ., 1958, 388 p.
17. Garg B. K., Dukkipati R. V. *Dinamika podvizhnogo sostava* [Dynamics of rolling stock]. Moscow, Transport Publ., 1988, 392 p.
18. Kogan A. Ya., Krepegorskiy S. S., Shinkarev B. S. *Raschety zheleznodorozhnogo puti na vertikal'nyu dinamicheskuyu nagruzku* [Calculations of the railway track for vertical dynamic loading]. *Trudy VNIIZhT* [Proc. of the VNIIZhT]. Moscow, Transport Publ., 1973, no. 502, 80 p.
19. Arnol'd V. I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 472 p.

ABOUT THE AUTHORS

Sergey V. MIKHAYLOV,

Business Analyst of the Center for Mathematical Modeling, JSC "VNIIZhT"

Mark M. GONIK,

Cand. Sci. (Eng.), Head of the Center for Mathematical Modeling, JSC "VNIIZhT"

Received 01.12.2017

Revised 06.02.2018

Accepted 19.02.2018

■ E-mail: mikhailov.sergey@vniizht.ru (S. V. Mikhailov)