

Совершенствование механизма поиска оптимальных цен на новые услуги в поездах дальнего следования на основе применения нелинейных по параметрам моделей анализа ценовой эластичности спроса

Аннотация. В статье рассмотрены особенности использования нелинейных по параметрам экономико-математических моделей для повышения эффективности работы механизма анализа ценовой эластичности спроса и поиска оптимальной стоимости услуг железнодорожного пассажирского транспорта в рамках решения задач управления доходностью.

На основе изучения качественных характеристик наблюдаемых параметров ценовой эластичности спроса пассажиров железнодорожного транспорта, полученных из данных маркетинговых исследований, а также анализа практического опыта применения различных видов математических функций для исследования параметров рыночного спроса произведен отбор пяти форм нелинейных по параметрам экономико-математических моделей для исследования их потенциала в области анализа ценовой эластичности спроса и управления доходами.

Рассмотрены методические подходы к сравнительной оценке эффективности применения при исследовании ценовой эластичности спроса различных видов нелинейных по параметрам экономико-математических моделей, а также практические вопросы их использования в поиске оптимальных цен и управлении доходностью.

Проведено сопоставление эффективности применения линейных и выбранных нелинейных по параметрам экономико-математических моделей для анализа ценовой эластичности по результатам их апробации на массиве маркетинговых данных о спросе пассажиров в фирменных и скоростных поездах дальнего следования. На основе полученных результатов работы экономико-математических моделей на массиве маркетинговой информации исследованы особенности применения и сравнительная результативность работы различных типов специализированных алгоритмов поиска оптимальных параметров для выбранных в рамках исследования форм нелинейных моделей при анализе ценовой эластичности спроса с учетом ее специфики для условий железнодорожного пассажирского транспорта.

Ключевые слова: железнодорожный транспорт; пассажирские перевозки; экономико-математические модели; управление доходами; тарифная политика

Повышение экономической эффективности работы пассажирских поездов дальнего следования в современных рыночных условиях является для Федеральной пассажирской компании одной из ключевых задач, актуальность которой неуклонно возрастает.

Важнейшим инструментом для решения этой задачи является эффективное реагирование на требования рынка на основе предложения оптимального

соотношения стоимости и качества для существующих и новых внедряемых услуг, основанное на исследовании запросов пассажиров и анализе ценовой эластичности спроса на базе применения экономико-математических моделей различного вида с целью построения эффективной системы управления доходами и рентабельностью.

Рассматривая существующий в настоящее время методический инструментарий поиска оптимальных цен на новые услуги, учитывающий специфику железнодорожных пассажирских перевозок, следует отметить, что в работах [1, 2] был предложен механизм определения оптимального ценового интервала на услуги, базирующийся на сценарном анализе ответов респондентов о предельных ценах с использованием ранговых шкал ценовых диапазонов, а также представлены подходы к анализу ценовой эластичности спроса и определению оптимальных (по критерию максимизации дохода) цен, основанные на аппарате регрессионного анализа с использованием **линейных по параметрам моделей** вида

$$F = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon, \quad (1)$$

где $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — функции факторов x , не включающие в себя неизвестные параметры β , которые и определяются при регрессионном анализе на основе обработки имеющихся данных о наблюдаемых (F) и моделируемых значениях $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Выбор линейных по параметрам моделей был обусловлен прежде всего их наибольшей практической распространенностью вследствие наиболее проработанного математического аппарата поиска оптимальных параметров таких моделей (что гарантирует высокую скорость и сходимость алгоритмов оценивания) и относительной простоты интерпретации получаемых результатов.

Следует отметить, что модели, определяемые по формуле (1), являются частным случаем **нелинейных по параметрам моделей** вида

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \varepsilon, \quad (2)$$

в которых функции включают в себя как факторы x , так и неизвестные параметры β , поиск оптимальных значений которых осуществляется в рамках регрессионного анализа.

Нелинейные по параметрам модели обладают намного большей гибкостью при их использовании в анализе ценовой эластичности спроса, что потенциально способно обеспечить более высокую эффективность механизма поиска оптимальных цен в рамках системы управления доходностью. Долгое время их применение в практических отраслевых исследованиях сдерживалось вычислительной сложностью алгоритмов, отсутствием гарантий сходимости, высокой длительностью поиска и т. д. Однако к настоящему моменту можно отметить существенный прогресс как в теории нелинейной оптимизации, так и в разработке практических механизмов ее реализации в рамках вычислительных алгоритмов и программных комплексов, в том числе и для железнодорожного пассажирского транспорта. Так, в работах [3, 4] было проведено успешное апробирование применения двух форм моделей нелинейного оценивания для поиска оптимальных тарифов на железнодорожные пассажирские перевозки дальнего следования, что в свою очередь стало ядром разрабатываемой системы управления доходностью, которая в дальнейшем трансформировалась в систему управления рентабельностью пассажирских перевозок.

Учитывая успехи использования нелинейных моделей в практических исследованиях экономических вопросов железнодорожного транспорта, целесообразным представляется дальнейший поиск наиболее подходящих для специфики рынка пассажирских перевозок форм нелинейных моделей и алгоритмов поиска их оптимальных параметров, а также расширение сферы применения нелинейного моделирования, в том числе и за счет его реализации в механизме поиска оптимальных цен на новые услуги в поездах дальнего следования.

В рамках данного исследования на основе изучения качественных характеристик наблюдаемых параметров ценовой эластичности спроса пассажиров железнодорожного транспорта, полученных из данных маркетинговых исследований, а также анализа практического опыта применения различных видов математических функций для исследования параметров рыночного спроса, был произведен отбор следующих пяти форм нелинейных по параметрам экономико-математических моделей для исследования их потенциала в области анализа ценовой эластичности спроса на новые услуги в поездах.

1. Модель Вейбулла (Weibull):

$$y(x) = \beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4}), \quad (3)$$

где $y(x)$ — моделируемая зависимость уровня спроса на услугу от ее стоимости x ; β — неизвестные параме-

тры, находимые с помощью специализированных алгоритмов в рамках регрессионного анализа на основе использования критерия наименьших квадратов.

2. Модель, использованная в работе [3] для анализа ценовой эластичности спроса пассажиров на услуги железнодорожного транспорта:

$$N(p) = \exp \left[- \left(\frac{p}{p_0} \right)^q \right], \quad (4)$$

где параметр p_0 является масштабным коэффициентом по ценовой координате, а величина q характеризует отношение предельной цены (p_{np}) к граничной ($p_{гп}$). Эту модель, учитывая возможность преобразования к представленному в формуле (5) виду

$$N(p) = \exp \left[- \left[\frac{1}{p_0} \right]^q \left[\frac{p}{1} \right]^q \right] \quad (5)$$

и соответственно записи в эквивалентной форме: $y(x) = \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$, будем в дальнейшем называть частным случаем модели Вейбулла (с двумя неизвестными параметрами).

3. Модель Гомпертца (Gompertz):

$$y(x) = \beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x)). \quad (6)$$

4. Модель Перла — Рида (Pearl — Reed):

$$y(x) = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}. \quad (7)$$

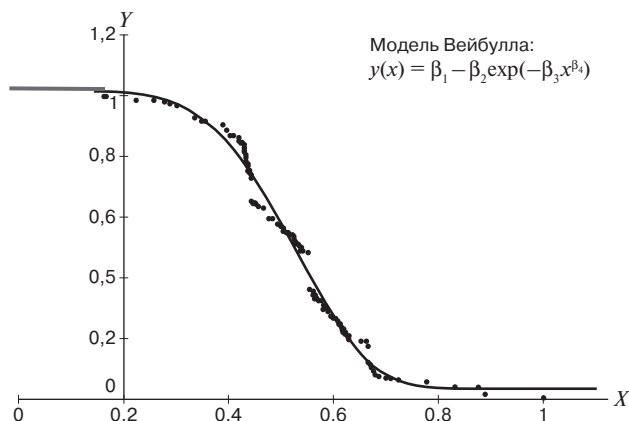
5. Модель Ферхюльста (Verhulst):

$$y(x) = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-\beta_3 x)}. \quad (8)$$

Все отмеченные модели отличает возможность гибко отражать реальные характеристики спроса пассажиров, в том числе возможное наличие на кривой спроса различных зон: начальной зоны высокой ценовой неэластичности (особенно при избыточном спросе и низких значениях цены) и одной или нескольких зон с переменной характера изменения ценовой эластичности при достижении определенных стоимостных уровней (рисунок).

Важным аспектом нелинейного моделирования зависимостей является решение вопроса о выборе эффективного алгоритма поиска неизвестных величин используемой функции, а также об определении начальных значений параметров.

Для целей определения наиболее результативных алгоритмов поиска неизвестных параметров для выбранных форм нелинейных моделей была проведена апробация их работы на массиве маркетинговых данных проведенного в период с 19 по 25 октября 2009 г. анкетного опроса 3,5 тыс. пассажиров



Пример аппроксимации спроса пассажиров моделью Вейбулла

20 фирменных поездов, курсирующих в направлении Москва — Санкт-Петербург.

С помощью выбранных форм нелинейных моделей исследовались зависимости уровня отказов пассажиров от использования той или иной услуги при достижении определенных значений ее предельной цены (детальное описание получения и обработки данных опроса представлено в [2]).

В частности, доля пассажиров (в общем количестве заинтересованных), которые воспользуются услугой при i -й цене, определялась по формуле

$$F_i = F_{i-1} - \frac{n_i}{n_{\text{общ}}}, \quad (9)$$

где $i > 1$ — i -й вариант предельной цены, указанной пассажирами; $F_1 = 1$ — доля пассажиров, которые воспользуются услугой при цене ниже минимального уровня из всех указанных в опросе.

Оценивание параметров β осуществлялось на базе использования метода наименьших квадратов, т. е. выполнялся поиск таких параметров моделей, при которых

$$\sum (F_i - y(x_i))^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где F_i — доля пассажиров (в общем количестве заинтересованных), которые воспользуются услугой при i -й цене x (которая, в свою очередь, для удобства работы алгоритмов определялась как доля от максимальной цены, указанной в анкетном опросе).

При этом следует отметить, что в случае нелинейных по параметрам моделей не существует универсального алгоритма, гарантирующего сходимость и нахождение глобально оптимальных решений для любых видов моделей и наборов данных. В рамках данного исследования были использованы следующие разновидности алгоритмов поиска оптимальных параметров β (особенности использования которых детально рассматриваются в [5–11]):

- базирующиеся на методах градиента;

- использующие методы сопряженного градиента;
- основанные на ньютоновских методах;
- опирающиеся на квазиньютоновские методы (DFM-алгоритм и BFGS-алгоритм);
- базирующиеся на методе Левенберга — Марквардта;
- основанные на методах численной минимизации (алгоритм Нельдера — Мида, алгоритм условного отсечения и алгоритм случайного поиска).

Кроме непосредственной оценки работы алгоритмов оценивания, апробация выбранных форм нелинейных моделей позволила получить представление об их сравнительной эффективности при исследовании ценовой эластичности и сопоставить с линейными по параметрам моделями, результаты работы которых исследованы и представлены в [2]. В частности, в рамках данной статьи в качестве эталона для сравнения эффективности работы использовалась линейная по параметрам функциональная форма полинома третьей степени, определяемая по формуле

$$y(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3. \quad (11)$$

Применяемый для ее оптимизации (в рамках метода наименьших квадратов) алгоритм детально изложен в [12].

Для сравнительной оценки эффективности работы линейных по параметрам и выбранных нелинейных моделей при отражении зависимости спроса пассажиров на новые услуги от их стоимости был использован следующий комплекс критериев:

- скорректированный индекс детерминации, который позволяет оценить, какая часть общей вариации спроса объясняется полученной моделью, с учетом штрафа за рост количества неизвестных оцениваемых факторных переменных:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{RSS_p(n-1)}{(n-z) \sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2}, \quad (12)$$

где $RSS_p = \sum_{i=1}^n (F_i - y(x_i))^2$ — остаточная сумма квадратов, полученная при оценивании коэффициентов модели методом наименьших квадратов; n — количество наблюдений; z — количество неизвестных оцениваемых параметров β ; F_i — доля пассажиров (в общем количестве заинтересованных), которые воспользуются услугой при i -й цене x ; $\bar{F}$ — среднее значение наблюдаемого долевого распределения в массиве маркетинговых данных;

- средний модуль абсолютной ошибки прогноза по модели, часто называемый MAD (более удобный при исследовании данного случая долевыми зависимостями по сравнению с наиболее популярным средним модулем относительной ошибки, называемым MAPE), вычисляемый по формуле

$$|\bar{\varepsilon}| = \frac{\sum_{i=1}^n |F_i - y(x_i)|}{n}; \quad (13)$$

• критерий Акаике (Akaike 's information criterion — AIC) — специализированный показатель для сравнения моделей, с учетом штрафа за рост количества неизвестных оцениваемых факторных переменных:

$$AIC = \ln \left(\frac{RSS_p}{n} \right) + \frac{2z}{n} + 1 + \ln 2\pi; \quad (14)$$

• Критерий Шварца (Schwarz's information criterion — SC) — специализированный показатель сравнения моделей с учетом штрафа за рост количества неизвестных оцениваемых факторных переменных, отличающийся от AIC большей состоятельностью, т.е. при неограниченном росте количества наблюдений применение критерия Шварца выявляет модель, соответствующую истинному процессу порождения данных, если она есть среди альтернативных изучаемых моделей:

$$SC = \ln \left(\frac{RSS_p}{n} \right) + \frac{z \ln n}{n} + 1 + \ln 2\pi. \quad (15)$$

С точки зрения практического использования перечисленного комплекса показателей при выборе наиболее эффективной формы нелинейной модели анализа ценовой эластичности спроса обычно поступают следующим образом: сначала исключают модели с превышением требуемой верхней границы по показателям MAD или MAPE (например, исключают все модели с $MAPE > 10\%$), затем определяют наиболее предпочтительную модель на основе анализа показателей R^2_{adj} , AIC, SC. При этом предпочтение, как правило, отдается модели с наименьшим критерием Шварца, однако, когда критерий Акаике останавливается на более полной модели, ее часто также оставляют для дальнейшего изучения и последующих сравнений на других массивах данных [13, 14].

Тем не менее, если в ходе сравнения возникают существенные затруднения в определении наиболее эффективной модели из-за несовпадения результатов выбора по различным критериям, предлагается использовать следующую расчетную величину — «Интегральный критерий сравнительной ошибки модели в исследуемой группе»:

$$I^%_{\text{инт}_i} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{k_j p_{ji}}{\sum_{i=1}^n p_{ji}} \right) 100\%, \quad (16)$$

где n — количество изучаемых моделей (размер группы); m — количество критериев, используемых для оценки эффективности i -й модели; k_j — взвешивающие коэффициенты $\left(\sum_{j=1}^m k_j = 1 \right)$, отражающие важ-

ность для эксперта j -го критерия в общей интегральной оценке; p_{ji} — значение для i -й исследуемой модели j -го критерия, минимальное значение которого свидетельствует о наибольшей эффективности модели (т.е. предполагается непосредственное использование значений AIC, SC, MAPE, MAD, в то время как для величин, подобных R^2_{adj} , должны рассматриваться обратные значения, т.е. $\frac{1}{R^2_{adj}}$).

Так, например, при сравнениях в группе из двух моделей при использовании трех критериев оптимизации (SC, MAPE, R^2_{adj}), равнозначных для эксперта по своей важности, формула расчета для первой модели в группе примет вид

$$I^%_{\text{инт}_1} = \left(\frac{1}{3} \frac{SC_1}{SC_1 + SC_2} + \frac{1}{3} \frac{MAPE_1}{MAPE_1 + MAPE_2} + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{R^2_{adj_1}}}{\frac{1}{R^2_{adj_1}} + \frac{1}{R^2_{adj_2}}} \right) 100\%.$$

Таким образом, лучшая модель в группе будет иметь наименьшее значение $I^%_{\text{инт}_1}$, при этом значение самой лучшей модели всегда будет стремиться к нулю, а самой худшей — к 100 %.

Полученные результаты оценки нелинейных и линейных по параметрам моделей спроса на услуги «Интернет» и «Связь» в вагонах купе и СВ фирменных пассажирских поездов представлены в табл. 1 — 4 и свидетельствуют о том, что для процесса исследования ценовой эластичности спроса на новые услуги применение нелинейных моделей оказывается более эффективным, чем линейных по параметрам. При этом, учитывая небольшой участок начальной зоны высокой ценовой неэластичности для услуг и возможную неоднородность характеристик потенциальных потребителей (обеспечивающих большее количество изломов кривой спроса), наиболее перспективным представляется использование модели Перла — Рида (7). Кроме того, можно отметить, что полная модель Вейбулла чаще оказывается более эффективной по всем критериям, чем ее частный двухпараметрический случай, хотя можно отметить, что показатели по выбранным формам нелинейных моделей в целом достаточно близки между собой (т.е. можно предполагать возможность использования для практических целей любой нелинейной формы из перечисленных, руководствуясь при необходимости соображениями большего удобства применения конкретного оптимизационного алгоритма).

Учитывая, что при анализе ценовой эластичности спроса отдельные предлагаемые формы нелинейных моделей оказались более эффективными (табл. 2 — 4), чем используемая в [3] для анализа

Таблица 1

Результаты оценки моделей спроса на услугу «Интернет» в вагонах купе фирменных пассажирских поездов

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R^2_{adj}	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,993531	-3,86527	-3,67645	0,0235776	1,04074	-4,38055	6,17071	-2,8419	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,994471	-4,06869	-3,92708	0,0216737	5,75662	1,71666	-2,27036	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,995278	-4,14202	-3,906	0,0167697	1,31217	0,289941	-12,7595	10,6074	-4,71748
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,995584	-4,29332	-4,15171	0,0187651	1,74448	-8,17349	0,701948	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,995755	-4,28656	-4,09775	0,0174726	0,0113149	-0,999303	8,07323	1,29153	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,996033	-4,45391	-4,35951	0,0173485	7,91455	1,30256	—	—	—

Примечание: в табл. 1 – 8 представлены округленные значения.

Таблица 2

Результаты оценки моделей спроса на услугу «Интернет» в вагонах СВ фирменных пассажирских поездов

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R^2_{adj}	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,976808	-2,63039	-2,4478	0,0346099	1,11904	-4,06608	5,16931	-2,2182	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,97921	-2,78729	-2,65035	0,0382877	5,78363	1,66306	-1,91265	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,991772	-3,62914	-3,4009	0,0231244	1,06258	0,0342225	-26,7127	49,5473	-35,125
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,983973	-3,04745	-2,91051	0,0360208	1,62532	-7,39207	0,51191	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,988198	-3,30593	-3,12334	0,030057	0,0441894	-1,00399	8,80521	1,47676	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,984867	-3,16069	-3,0694	0,0355397	7,6549	1,50148	—	—	—

Таблица 3

Результаты оценки моделей спроса на услугу «Связь» в вагонах купе фирменных пассажирских поездов

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R^2_{adj}	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,953618	-2,00962	-1,8208	0,05238	1,16057	-4,04425	4,74027	-1,84946	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,981491	-2,97458	-2,83297	0,0348434	1,18947	0,121947	-10,0738	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,992965	-3,85758	-3,62156	0,0216624	1,02656	0,00835244	-38,1952	75,7592	-52,9196
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,984246	-3,13575	-2,99414	0,0320852	1,12037	-14,9286	0,0702073	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,988421	-3,39737	-3,20856	0,0299835	0,0499505	-0,973076	29,639	2,19982	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,985188	-3,25074	-3,15634	0,0302499	30,3688	2,28963	—	—	—

Таблица 4

Результаты оценки моделей спроса на услугу «Связь» в вагонах СВ фирменных пассажирских поездов

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R^2_{adj}	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,942349	-1,88013	-1,69754	0,0525635	1,12278	-3,00896	2,88106	-0,982968	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,948796	-2,04627	-1,90933	0,055919	7,55308	1,92271	-1,25868	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,985291	-3,20858	-2,98035	0,0252684	1,04262	0,00509592	-37,325	74,9537	-52,2782
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,956245	-2,20348	-2,06654	0,0545342	1,62468	-5,56066	0,49797	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,963455	-2,33597	-2,15338	0,0485892	0,0692616	-0,991836	7,28334	1,61608	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,959878	-2,34601	-2,25471	0,0514498	4,82215	1,4937	—	—	—

Таблица 5

Результаты оценки моделей спроса на билеты купе эконом-класса поезда № 3/4 «Фирменный экспресс»

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R^2_{adj}	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,958052	-2,38502	-2,19305	0,051521	0,972877	1,81117	-8,3288	5,60695	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,974543	-2,91599	-2,77201	0,0403272	1,06139	0,0124451	-8,25705	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,979813	-3,08677	-2,8468	0,0329736	1,07047	0,0680997	5,61432	-33,7464	21,5667
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,981126	-3,21519	-3,07121	0,0337228	1,02265	-12,3397	0,00244058	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,979589	-3,10537	-2,9134	0,0345233	0,0300332	-0,98161	16,5031	4,38813	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,979897	-3,18533	-3,08934	0,0354971	15,1093	4,3678	—	—	—

ценовой эластичности спроса на перевозки двухпараметрическая модель Вейбулла (2), была проведена дополнительная оценка работы предлагаемых нелинейных по параметрам моделей анализа ценовой эластичности на массиве данных о спросе пассажиров на билеты в вагоны СВ бизнес-класса и купе эконом-класса для фирменных поездов № 3/4 «Фирменный экспресс» и № 5/6 «Николаевский экспресс». Результаты апробации моделей представлены в табл. 5–8 и свидетельствуют о высоком потенциале использования выбранных нелинейных по параметрам форм моделей не только в механизме поиска оптимальных цен на новые услуги, но и как удобного инструментария анализа спроса на существующие услуги для целей динамического управления доходностью перевозок. Основные подходы к использованию получаемых модельных параметров ценовой эластичности спроса при последующем определении максимизирующей доходности услуг представлены в [2]. Однако в случае использования нелинейных по параметрам моделей

предпочтительнее применение для поиска оптимума метода подстановок вместо прямого получения аналитических решений, основанных на дифференцировании (т. е. последовательная подстановка в модель значений x от 0 до 1 с шагом, например, 0,0001, что полностью отвечает всем практическим требованиям поиска оптимальной величины тарифов для данных условий).

При этом, как видно из представленных в табл. 9 результатов оценки работы различных типов алгоритмов поиска параметров для нелинейных моделей анализа ценовой эластичности спроса пассажиров железнодорожного транспорта, наиболее эффективным оказался алгоритм оценивания Левенберга — Марквардта: из 40 случаев его использования для поиска параметров нелинейных моделей (оценивание пяти моделей на восьми наборах данных) только в одном была получена величина остаточной суммы квадратов, несущественно, на сотые доли процента, превышающая значения, полученные алгоритмами квази-ньютоновского типа. Что касается наиболее простой

Таблица 6

Результаты оценки моделей спроса на билеты СВ бизнес-класса поезда № 3/4 «Фирменный экспресс»

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R_{adj}^2	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,947026	-1,89611	-1,69728	0,0622222	0,973352	1,55841	-6,68844	4,18399	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,955165	-2,10367	-1,95455	0,0560274	1,06153	0,0157966	-6,93424	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,965088	-2,27682	-2,02828	0,0433452	0,989179	0,000434354	-14,3303	-3,00237	6,33762
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,966856	-2,40579	-2,25667	0,0464764	1,01184	-10,9521	0,0024325	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,965025	-2,31129	-2,11246	0,046014	0,0723807	-0,917603	15,0567	4,99177	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,964057	-2,36935	-2,26993	0,0505894	7,66687	4,06941	—	—	—

Таблица 7

Результаты оценки моделей спроса на билеты купе эконом-класса поезда № 5/6 «Николаевский экспресс»

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R_{adj}^2	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,861563	-1,10131	-0,908159	0,096457	1,178	-3,34547	2,13474	0,0532323	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,980892	-3,12658	-2,98171	0,0337945	1,04813	0,0328484	-12,8285	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,977475	-2,87912	-2,63768	0,0336954	1,20014	0,187119	-2,93639	-9,11024	-53,7561
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,97854	-3,01047	-2,86561	0,0363126	0,99577	-19,7892	0,0085309	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,977746	-2,92922	-2,73607	0,0376779	0,0258502	-0,950039	101,48	3,49329	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,97935	-3,09984	-3,00326	0,0364864	68,1164	3,20939	—	—	—

Таблица 8

Результаты оценки моделей спроса на билеты фирменного СВ бизнес-класса поезда № 5/6 «Николаевский экспресс»

Вид зависимости $y(x) =$	Критерии оценки модели				Оценки параметров				
	R_{adj}^2	AIC	SC	$ \bar{\epsilon} $	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$	0,975813	-2,90198	-2,7045	0,0370459	0,977614	0,595763	-5,64131	4,09869	—
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	0,98755	-3,60175	-3,45364	0,029398	1,01957	0,03192	-6,8973	—	—
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0,990308	-3,78358	-3,53674	0,0241524	1,00285	0,00199016	-34,6532	84,2372	-83,1779
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	0,983584	-3,32522	-3,17711	0,0338631	0,982432	-9,99024	0,0114266	—	—
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,982343	-3,21668	-3,0192	0,0351607	0,0161489	-0,93917	10,112	3,35512	—
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	0,981133	-3,2242	-3,12546	0,0350628	7,38263	2,87156	—	—	—

Таблица 9

Оценка работы различных типов алгоритмов поиска параметров для нелинейных моделей анализа ценовой эластичности спроса пассажиров железнодорожного транспорта

Вид зависимости $y(x) =$	Тип алгоритма поиска оптимальных параметров					
	Градиент	Сопряженный градиент	Ньютона	Квазиньютона	Левенберга — Марквардта	Численной минимизации
$\beta_1 \exp(-\beta_2 \exp(-\beta_3 x))$	1/7	2/6	2/6	3/5	8/0	7/1
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-(\beta_3 x + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^3))}$	0/8	0/8	2/6	2/6	7/1	4/4
$\frac{\beta_1}{1 + \beta_3 \exp(-\beta_2 x)}$	1/7	3/5	5/3	8/0	8/0	8/0
$\beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	2/6	7/1	8/0	8/0	8/0	6/2
$\exp(-\beta_3 x^{\beta_4})$	8/0	8/0	8/0	8/0	8/0	8/0

Примечание: значение в числителе — количество найденных по рассматриваемым нелинейным моделям оптимальных решений по критерию наименьших квадратов для рассмотренных 8 наборов данных. Значение в знаменателе — количество найденных неоптимальных решений (т.е. по другим алгоритмам были достигнуты более низкие значения остаточной суммы квадратов, полученных при оценивании коэффициентов моделей методом наименьших квадратов).

с точки зрения оценивания модели, то преимущество по-прежнему удерживает предложенный в [3] частный двухпараметрический случай модели Вейбулла.

Заключение. Представленные результаты апробации нелинейных форм моделей на данных анкетных опросов необходимо рассматривать как первый начальный шаг, помогающий точнее определить направление и перспективы дальнейших исследований по вопросам их применения и эффективности в рамках динамической системы управления доходностью. Эти результаты должны быть последовательно дополнены и уточнены на основе дальнейших детальных исследований на массиве наблюдаемого объема спроса пассажиров с учетом влияния на его ценовую эластичность факторов сезонности, деятельности конкурентов и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пастухов С.С. Определение основных путей повышения эффективности работы вагонов-ресторанов на основе маркетингового анализа // Вестник ВНИИЖТ. 2008. № 2. С. 42–47.
2. Пастухов С.С. Определение оптимальных цен на новые услуги в поездах дальнего следования на основе методов математического моделирования // Проблемы железнодорожного транспорта: сб. науч. тр. ОАО «ВНИИЖТ» / под ред. Г.В. Гогричани. М.: Интекст, 2011. С. 10–20.
3. Методы реализации системы управления доходностью применительно к пассажирскому железнодорожному сообщению / О.Ф. Мирошниченко [и др.] // Вестник ВНИИЖТ. 2010. № 6. С. 10–15.
4. O.F. Miroshnichenko, G.L. Venediktov, V.M. Kochetkov, S.S. Pastukhov. Application of Mathematical Economic Models to Automated Passenger Service Profitability Management System // VNIIZhT Bulletin. 2012. № 1, pp. 40–45.

5. Econometric analysis / William H. Greene. 7th ed. Prentice Hall, 2012. — 1232 p.
6. Press, W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
7. Zörnig, Peter. Nonlinear Programming: an Introduction. Boston: De Gruyter, 2014. — 350 p.
8. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн. 2 / пер. с англ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 1987. 351 с.
9. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / пер. с англ. М.: Мир, 1988. 440 с.
10. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
11. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие. 2-е изд., исправл. М.: Высш. шк., 2005. 544 с.
12. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ / пер. с болг. Ю.П. Адлера. М.: Финансы и статистика, 1983. 239 с.
13. Вербик Марно. Путеводитель по современной эконометрике / пер. с англ. В.А. Банникова; науч. ред. и предисл. С.А. Айвазяна. М.: Научная книга, 2008. 616 с.
14. Носко В.П. Эконометрика. Кн. 1. Ч. 1, 2: учебник. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. 672 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПАСТУХОВ Сергей Сергеевич,
ведущий научный сотрудник
отделения «Экономика и финансы»,
ОАО «ВНИИЖТ».
129626, Москва, 3-я Мытищинская ул., д. 10.
Тел.: (495) 602-83-92.
E-mail: pastuhovsergey@bk.ru

Seeking Mechanism Improvement of Optimum Prices for New Services in Long-Distance Trains through Use of Nonlinear-in-the-Parameter Analysis Models of Price Elasticity of Demand

Sergey S. Pastukhov, Candidate of Economics, Leading Researcher, Department for Economics and Finance, JSC Railway Research Institute (JSC VNIIZhT). 10, 3rd Mytischinskaya str., 129626 Moscow, Russian Federation. Tel.: +7 (495) 602 8392. E-mail: pastuhovsergey@bk.ru

Abstract. There is discussed usage pattern of the nonlinear-in-the-parameter economic and mathematical models aimed at increase in efficiency of price elasticity of demand analysis mechanism and search of optimum fees for services of railway passenger transport within the solving framework of profitability management problems.

Based on the qualitative characteristics study of the price elasticity of railway passenger traffic demand observables obtained from marketing research as well as on the practice analysis of applying various type mathematical functions to market demand research there were selected five types of nonlinear-in-the-parameter economic and mathematical models for the purpose of examining their potential in the areas of price elasticity of demand analysis and profitability management.

Under discussion are methodical approaches to comparative appraisal of application efficiency of various type nonlinear-in-the-parameter economic and mathematical models in the context of price elasticity of demand investigations. Also discussed are application issues of such models in the areas of optimum service fees seeking and profitability management.

There was drawn application efficiency comparison of linear and nonlinear-in-the-parameter economic and mathematical models selected for the purpose of price elasticity analysis according to results of their approbation on the marketing data array characterizing services demand in the deluxe and high-speed long-distance trains. On the basis of the obtained results of the economic and mathematical models operation with the marketing information array there were investigated usage pattern and comparative performance of various type application-specific search algorithms of optimum parameters for the selected in the course of the investigation nonlinear model types while engaged in analyzing price elasticity of demand in the light of its specific character in the passenger railway transport environment.

Keywords: railway transport; passenger traffic; economic and mathematical models; revenue management; tariff policy

References

1. Pastukhov S.S. *Opredelenie osnovnykh putey povysheniya effektivnosti raboty vagonov-restoranov na osnove marketingovogo analiza* [Defining basic ways to raising efficiency of restaurant cars work based on marketing analysis]. Vestnik VNIIZhT [Vestnik of the Railway Research Institute], 2008, no. 2, pp. 42–47.
2. Pastukhov S.S. *Opredelenie optimal'nykh tsen na novye uslugi v poezdakh dal'nego sledovaniya na osnove metodov matematicheskogo modelirovaniya* [Determination of the optimal pricing of new services in long-distance trains on the basis of

mathematical modeling]. Problemy zheleznodorozhnogo transporta. Zadachi i puti ikh resheniya. Sb. tr. uchenykh OAO "VNIIZhT" [Problems of rail transport. Tasks and solutions. Coll. works of JSC "VNIIZhT" (Railway Research Institute) scientists]. Moscow, Intext Publ., 2011, pp. 10–20.

3. Miroshnichenko O.F., Venediktov G.L., Kochetkov V.M., Pastukhov S.S. *Metody realizatsii sistemy upravleniya dokhodnost'yu primeritel'no k passazhirskomu zheleznodorozhnomu soobshcheniyu* [Methods of realizing system of profitability management relating to passenger railway service]. Vestnik VNIIZhT [Vestnik of the Railway Research Institute], 2010, no. 6, pp. 10–15.

4. Miroshnichenko O.F., Venediktov G.L., Kochetkov V.M., Pastukhov S.S. *Application of Mathematical Economic Models to Automated Passenger Service Profitability Management System*. VNIIZhT Bulletin, 2012, no. 1, pp. 40–45.

5. Greene W.H. *Econometric analysis*. 7th ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall Publ., 2012. 1232 p.

6. Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3rd ed. Cambridge, CUP Publ., 2007. 1235 p.

7. Zörnig P. *Nonlinear Programming: an Introduction*. Boston, De Gruyter Publ., 2014. 350p.

8. Draper N., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York, Wiley-Interscience Publ., 1979, 2nd book. 336 p. (Russ. ed.: Dreyper N., Smit G. *Prikladnoy regressionnyy analiz*. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1987, kn. 2. 351 p.). (Wiley Series in Probability and Statistics).

9. Dennis J.E., Schnabel R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. New York, SIAM Publ., 1987. 394 p. (Russ. ed.: Dennis Dzh. ml., Shnabel' R. *Chislennyye metody bezuslovnoy optimizatsii i resheniya nelineynykh uravneniy*. Moscow, Mir Publ., 1988. 440 p.).

10. Attetkov A.V., Galkin S.V., Zarubin B.C. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2003. 440 p.

11. Panteleev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization methods in examples and problems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005. 544 p.

12. Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov E. *Prikladnoy lineyny regressionnyy analiz* (transl. from Bulg.) [Applied linear regression analysis]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1983. 239 p.

13. Verbeek M. *A Guide to Modern Econometrics*. New York, Wiley Publ., 2007. 514 p. (Russ. ed.: Verbik M. *Putevoditel' po sovremennoy ekonometrike*. Moscow, Nauchnaya kniga Publ., 2008. 616 p.).

14. Nosko V.P. *Ekonometrika*. Moscow, Delo Publ., 2011, bk 1, pt. 1. 672 p.