

ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Оригинальная статья
УДК 629.4.027.2:625.032.3
EDN: <https://elibrary.ru/irnfwn>



Генерирование геометрических неровностей как случайных возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей

А. Н. Савоськин, Н. С. Лавлинская ✉

Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ))
Москва, Российская Федерация

АННОТАЦИЯ

Введение. Для решения задач динамики рельсовых экипажей необходимо задать кинематическое возмущение их колебаний, в качестве которого используют эквивалентные вертикальные и горизонтальные геометрические неровности левого и правого рельсов. Для формирования такого четырехмерного возмущения выполняют генерацию реализаций многомерного случайного процесса, на основе авто- и взаимных корреляционных функций или спектральных и взаимных спектральных плотностей реальных записей неровностей рельсового пути. Работа посвящена уточнению вероятностных характеристик возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей, и разработке нового, упрощенного метода их генерации.

Материалы и методы. В работе выполнены вероятностный анализ длительных (свыше 14 км) записей натуральных неровностей рельсового пути и аппроксимация полученных вероятностных характеристик аналитическими выражениями, соответствующими дифференцируемым случайным процессам. Параметры этих процессов найдены методом наименьших квадратов. Новым способом реализована генерация случайного процесса неровностей для координаты пути с помощью многомерного формирующего фильтра, импульсные характеристики которого найдены по аналитическим выражениям авто- и взаимных корреляционных функций.

Результаты. Были получены уточненные значения параметров вероятностных характеристик неровностей рельсового пути, которые могут быть использованы для задания возмущений колебаний рельсовых экипажей при решении задач динамики. Предложен упрощенный метод генерации неровностей для аргумента координаты пути, который обеспечивает высокую сходимость с данными, полученными ранее.

Обсуждение и заключение. Полученные вероятностные характеристики могут быть использованы для генерации многомерного случайного процесса неровностей при исследовании колебаний различных типов рельсовых экипажей, возникающих при их движении с различными скоростями. Предложенный упрощенный метод генерации позволяет сократить время, затраченное на задание возмущений при моделировании.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамика рельсовых экипажей, кинематическое возмущение, геометрические неровности рельсов, корреляционные функции, спектральные плотности, аппроксимация вероятностных характеристик, генерация случайных процессов возмущения

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Савоськин А. Н., Лавлинская Н. С. Генерирование геометрических неровностей как случайных возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта (Вестник ВНИИЖТ). 2024. Т. 83, № 1. С. 24–39.



TECHNICAL MEANS OF RAILWAY TRANSPORT

Original article

UDK 629.4.027.2:625.032.3

EDN: <https://elibrary.ru/irnfwn>



Generation of geometric irregularities as random disturbances causing rail cab oscillations

Anatoliy N. Savoskin, Nataliya S. Lavlinskaya ✉

Russian University of Transport,
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. Solving the dynamics problems of rail cabs requires specifying the kinematic disturbance of their oscillations represented through equivalent vertical and horizontal geometric irregularities of the left and right rails. The formation of such four-dimensional disturbance involves the generation of multivariate random processes based on auto- and cross-correlation functions or spectral and cross-spectral densities of actual recordings of rail track irregularities. The paper refines the probabilistic properties of the disturbances that cause rail cab oscillations and develops a new simplified method for their generation.

Materials and methods. The paper provides a probabilistic analysis of long-term (over 14 km) recorded natural rail track irregularities and an approximation of the obtained probabilistic properties with analytical expressions corresponding to differentiable random processes. The parameters of these processes were found by the least-square method. The new method generated random irregularities for the track coordinate using a multivariate shaping filter whose impulse characteristics were found with analytical expressions of auto- and cross-correlation functions.

Results. The authors refined the probabilistic values of rail track irregularities that may be used to specify disturbances of rail cab oscillations when solving dynamics problems and proposed a simplified irregularity generation method for the track coordinate argument that provides high convergence to the previously obtained data.

Discussion and conclusion. The received probabilistic characteristics may be applied to generate a multivariate random irregularities when examining the oscillations of different type rail cabs occurring at different speeds movement. The proposed simplified generation method reduces the time for simulating disturbances.

KEYWORDS: rail cab dynamics, kinematic disturbance, geometric rail irregularities, correlation functions, spectral densities, approximation of probabilistic characteristics, generation of random disturbance processes

FOR CITATION: Savoskin A. N., Lavlinskaya N. S. Generation of geometric irregularities as random disturbances causing rail cab oscillations. *Russian Railway Science Journal*. 2024;83(1):24-39. (In Russ.).

Введение. Для решения задач динамики рельсовых экипажей возникает необходимость задания кинематического возмущения колебаний в виде четырехмерного случайного процесса $\|\eta_{i,j}(x=vt)\|$ эквивалентных вертикальных и горизонтальных геометрических неровностей левого и правого рельсов (η — неровность, x — координата пути, v — скорость движения, t — время).

Первые предложения по использованию геометрической неровности рельсов в качестве возмущения, вызывающего колебания экипажей, были сделаны в 1960-х гг. в ЦНИИ МПС (ВНИИЖТ) канд. техн. наук Н. Н. Кудрявцевым [1]. Он предложил использовать в качестве такого возмущения детерминированные усредненные геометрические неровности, обусловленные просадкой стыков:

- одnogорбые неровности на длине рельсового звена $L_{зв} = 25$ м:

$$\eta(t = x/v) = \eta_m (1 - \cos \omega t) = \eta_m \left(1 - \cos 2\pi \frac{v}{L_{зв}} t \right),$$

где η_m — амплитуда неровности (принималась равной $3 \div 5$ мм для пути в хорошем состоянии и $8 \div 10$ мм для пути в плохом состоянии);

- двугорбые неровности на длине рельсового звена $L_{зв} = 25$ м:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta_{m1} \left(1 - \cos \omega t - \frac{\eta_{m2}}{\eta_{m1}} \cos 2\omega t \right) = \\ &= \eta_m \left(1 - \cos 2\pi \frac{v}{L_{зв}} t - \frac{\eta_{m2}}{\eta_{m1}} \cos 4\pi \frac{v}{L_{зв}} t \right), \end{aligned}$$

где η_{m1} и η_{m2} — амплитуды одnogорбых и двугорбых неровностей, причем можно принять, что $\eta_{m2} = 0,2\eta_{m1}$.

Впоследствии использовались не только двугорбые, но и трехгорбые неровности.

Применение таких возмущений позволило выполнять расчеты колебаний рельсовых экипажей на появившихся в то время аналоговых вычислительных машинах, а позднее и на цифровых. Однако использование таких усредненных неровностей в качестве возмущений не гарантировало сходимости результатов расчета и эксперимента. Например, записи колебаний электровоза ВЛ80 при движении со скоростью 100 км/ч (рис. 1) наглядно показывают, что процессы колебаний рельсовых экипажей при движении по рельсовому пути имеют явно выраженный случайный характер. Поэтому применение детерминированных усредненных геометрических неровностей в качестве

возмущения не обеспечивает адекватность полученных решений и нецелесообразно.

Новые предложения по применению в качестве возмущений геометрических неровностей пути для моделирования динамической системы «экипаж — путь» были сделаны А. Я. Коганом на основе измерений геометрии ненагруженного пути [2]. Результаты этих измерений обобщены в РД 32.68–96, где рекомендованы аналитические выражения спектральных плотностей геометрических неровностей для диапазонов частот 0–10 и 10–100 Гц¹. При этом не учитывались взаимосвязи между неровностями левого и правого рельсов, которые определяются взаимными спектральными плотностями. Кроме того, применение данных рекомендаций² требует использования модели «экипаж — путь», в которой путь должен быть представлен в виде системы с распределенными параметрами: погонной массой, жесткостью и затуханием. Такая модель уточняет поведение исследуемой системы «экипаж — путь» в диапазоне частот свыше 30 Гц для пути на деревянных шпалах и свыше 100 Гц для пути на железобетонных шпалах. Однако диапазон частот колебаний рельсовых экипажей не превышает, как правило, 10 Гц. Поэтому в качестве возмущений целесообразно использовать «реальные неровности пути, замеренные вагоном-путеизмерителем, с учетом передаточных функций измерительного механизма» и рекомендованные в п. 3.4 РД 32.68–96³. Вероятностный анализ таких записей, а также способ задания таких возмущений для исследования колебаний рельсовых экипажей являются предметом данной статьи.

Для примера рассмотрим записи колебаний электровоза ВЛ80 по двум различным прямым участкам с нормальным и плохим состоянием пути при скорости движения 100 км/ч (рис. 1, а и б). В этих записях содержатся слагаемые с различными частотами, отсутствует какая-либо периодичность и нельзя выделить влияние каких-либо детерминированных неровностей. Кроме того, амплитуды отдельных слагаемых не имеют фиксированных значений. Поэтому записи этих колебаний можно рассматривать как случайные процессы.

Большое влияние на амплитуды и частоты этих колебаний оказывает состояние пути. Так, на записях, приведенных на рис. 1, б, выполненных при той же скорости движения 100 км/ч, что и на 1, а, но на пути с плохим состоянием, наглядно видно существенное увеличение уровня колебаний.

Поскольку динамические свойства реальных железнодорожных экипажей обусловлены нелинейными

¹ РД 32.68–96. Расчетные неровности железнодорожного пути для использования при исследованиях и проектировании пассажирских и грузовых вагонов: дата введения 1997-01-01. М.: ВНИИЖТ, 1996. 17 с.

² Там же.

³ Там же. С. 3.

силовыми характеристиками элементов рессорного подвешивания, поперечной характеристикой рельсового пути и т. п., то их случайные колебания являются нестационарными, и для вероятностного анализа следует применять алгоритм усреднения по множеству реализаций [3, 4]. Необходимое для такого расчета количество реализаций случайного процесса геометрических неровностей рельсового пути (более 4000) возможно получить при помощи генерации с использованием импульсных характеристик формирующего фильтра $k(t)$ ⁴ [3, 4].

В [3, 4] предложен способ генерации реализаций случайного процесса на основе авто- и взаимных корреляционных функций или спектральных и взаимных спектральных плотностей, предполагающий генерацию четырехмерного процесса $\|\eta(t = x/v)\|$ для каждой заданной скорости движения⁵. В настоящей работе предлагается новый, упрощенный метод генерации случайных процессов, который не требует генерации новых реализаций для различных скоростей движения, тем самым значительно сокращая машинное время, затрачиваемое на моделирование динамики разрабатываемых конструкций рельсовых экипажей.

Параметры аналитических выражений для вероятностных характеристик возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей, уточнены на основе анализа длительных (до 14 875 м) записей случайных процессов эквивалентных геометрических неровностей рельсового пути. Это обеспечивает получение более достоверных результатов вероятностного анализа по сравнению с ранее выполненными работами [3, 4], где для получения параметров вероятностных характеристик использовалось восьмикратное повторение реализаций неровностей для участков пути протяженностью 999 м.

Постановка задачи. При решении задач по исследованию колебаний рельсовых экипажей в качестве кинематического возмущения часто используют сгенерированные случайные процессы эквивалентных геометрических неровностей пути, вероятностные характеристики которых аналогичны неровностям, полученным по записям путеизмерительных вагонов. Такие неровности представляют собой четырехмерный случайный процесс $\|\eta(x = vt)\|$, учитывающий не только неровности правого и левого рельсов в плане и профиле пути, определяемые их автокорреляционными функциями $R_{\eta_r}(\tau_x)$ или спектральными плотностями $G_{\eta_r}(f_x)$, но и их взаимосвязи, определяемые взаимными корреляционными функциями

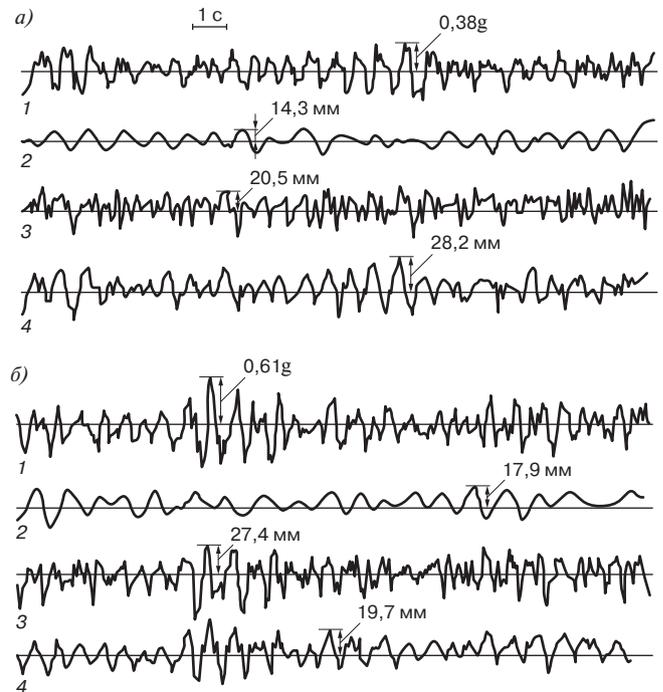


Рис. 1. Записи колебаний механической части электропоезда ВЛ80С при движении со скоростью 100 км/ч по прямым на участках пути хорошего (а) и плохого (б) состояния:

- 1 — вертикальные ускорения кузова; 2 — поперечные горизонтальные перемещения тележки относительно кузова;
- 3 и 4 — прогибы соответственно первой и второй ступеней рессорного подвешивания⁶

Fig. 1. Recordings of oscillations of VL80S Electric Locomotive mechanics travelling at 100 km/h in straight lines on sections of good (a) and bad (b) track conditions:

- 1 — vertical body acceleration; 2 — transverse horizontal displacement of the bogie in relation to the car body;
- 3 and 4 — deflections of the primary and secondary spring suspension stages, respectively⁶

$R_{\eta_{nr}}(\tau_x)$ или взаимными спектральными плотностями $G_{\eta_{nr}}(f_x)$:

$$\|\eta(x = vt)\| = \begin{pmatrix} \eta_{nr}(x = vt) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{nr}(x = vt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{nb}(x = vt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{nb}(x = vt) \end{pmatrix}$$

Здесь термин «эквивалентные» означает, что такие неровности приближенно учитывают все причины, вызывающие появление колебаний рельсовых экипажей, в том числе процессы взаимодействия колеса и

⁴ Акишин А. А. Горизонтальные колебания и движение в кривых моторного вагона электропоезда на четырех одноосных тележках с пневмоподвешиванием: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07. М., 2015. 355 с.

⁵ Там же. С. 56.

⁶ Механическая часть тягового подвижного состава: учеб. для вузов ж.-д. транспорта / И. В. Бирюков [и др.]; под ред. И. В. Бирюкова. Репринтное воспроизведение издания 1992 г. М.: Альянс, 2013. 440 с.

рельса. Такие неровности следует применять в качестве возмущения при исследовании колебаний математических моделей рельсовых экипажей, движущихся по абсолютно жесткому пути. В отличие от этого, при использовании континуальных и дискретных моделей пути следует применять геометрические неровности, полученные непосредственным измерением на ненагруженном пути [5, 6].

Для вероятностного анализа были использованы длительные реализации эквивалентных неровностей пути, записанные путеизмерительными вагонами. Графики реализаций горизонтальных ($\eta_{лр}(x)$ и $\eta_{пр}(x)$) и вертикальных ($\eta_{лв}(x)$ и $\eta_{пв}(x)$) неровностей левого и правого рельсов (рис. 2) показывают, что они имеют вид случайных колебаний с нулевыми средними значениями и стабильными размахами. Таким образом, в первом приближении их можно рассматривать как реализации эргодических стационарных случайных процессов.

Обычно экспериментальные неровности, записанные путеизмерительными вагонами, являются функциями координаты x . Вместе с тем решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания рельсовых экипажей, выполняют в функции времени $t = x/v$. Поэтому для исследования случайных колебаний рельсовых экипажей по вероятностным характеристикам реализаций $\|\eta(t = x/v)\|$ эти реализации необходимо генерировать для каждой заданной скорости движения [1].

Для решения таких задач авто- и взаимные корреляционные функции, а также спектральные и взаимные спектральные плотности случайных процессов $\|\eta(x)\|$ аппроксимируют аналитическими выражениями. По полученным параметрам этих выражений находят импульсные характеристики формирующих фильтров⁷ [3, 4, 7, 8].

Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей аналитическими выражениями. Для получения искомых параметров вероятностных характеристик натуральных неровностей был выполнен вероятностный анализ их реализаций⁸ (рис. 2) по методам, рассмотренным в [3, 9–13]. По результатам этого анализа было установлено, что в качестве законов распределения мгновенных значений неровностей могут быть приняты законы распределения Гаусса (законы нормального распределения)⁹. Взаимные корреляционные функции неровностей $R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x)$, представляющие собой матрицу размером 4×4 , определялись непосредственно по реализациям на основе следующей формулы [3]:

$$R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x = i_{сд}\Delta x) = \frac{1}{(N_p - s)\Delta x} \times \sum_{i_{сд}=0}^{(N_p-s)} \eta_i(i_{ш}\Delta x)\eta_u[(i_{ш} + i_{сд})\Delta x], \quad (1)$$

где Δx — шаг пространственной дискретизации реализаций случайных процессов $\eta_i(x)$ и $\eta_u(x)$; $i_{ш}$ — номер шага, $i_{ш} = 0, 1, 2, \dots, N_p$; N_p — число шагов в реализации; $\tau_x = i_{сд}\Delta x$ — сдвиг по координате x между значениями реализаций $\eta_i(i_{ш}\Delta x)$; $i_{сд}$ — номер шага по сдвигу; $s\Delta x$ — максимально допустимая величина этого сдвига при $s = (0, 1 \div 0, 25)N_p$.

При этом в частном случае, при $\eta_u(i_{ш}\Delta x) = \eta_i(i_{ш}\Delta x)$, по формуле (1) вычисляют автокорреляционные функции.

Спектральные плотности неровностей были получены путем численного выполнения преобразования Фурье¹⁰ от корреляционных функций [3]:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta_i\eta_u}(f_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x) \cos 2\pi f_x \tau_x d\tau_x; \quad (2) \\ \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x) e^{-j2\pi f_x \tau_x} d\tau_x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x) \cos 2\pi f_x \tau_x d\tau_x - j \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta_i\eta_u}(\tau_x) \sin 2\pi f_x \tau_x d\tau_x = \\ &= \operatorname{Re} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x) + j \operatorname{Im} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x) = \\ &= \Phi_{\eta_i\eta_u}^A(f_x) \exp[j\Phi_{\eta_i\eta_u}^\varphi(f_x)]. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь взаимная спектральная плотность $\Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)$ содержит следующие составляющие:

$\operatorname{Re} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)$ — вещественную (синфазную);

$\operatorname{Im} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)$ — мнимую (квадратурную);

$\Phi_{\eta_i\eta_u}^A(f_x) = \sqrt{[\operatorname{Re} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)]^2 + [\operatorname{Im} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)]^2}$ — амплитудную;

$\Phi_{\eta_i\eta_u}^\varphi(f_x) = \arctg[\operatorname{Im} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x) / \operatorname{Re} \Phi_{\eta_i\eta_u}(jf_x)]$ — фазовую.

Графики авто- и взаимных корреляционных функций, а также спектральных и взаимных спектральных плотностей (рис. 3 и 4, кривые 1) были построены по формулам (1)–(3) для реализаций случайных процессов возмущения, приведенных на рис. 2, б, г, е и з. На графиках имеется несколько составляющих. При этом на рис. 4, а и б изображены односторонние спектральные плотности $G_{\eta_i\eta_u}(f) = 4\Phi_{\eta_i\eta_u}(f)$, определенные в диапазоне частот $0 < f < \infty$, а на рис. 4, в...е — двухсторонние составляющие взаимной спектральной плотности, определенные в диапазоне частот $-\infty < f < \infty$.

⁷ Акишин А. А. Указ. соч. С. 60.

⁸ Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.; Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983. 416 с.

⁹ Акишин А. А. Указ. соч. С. 205.

¹⁰ Вентцель Е. С. Указ. соч. С. 434.

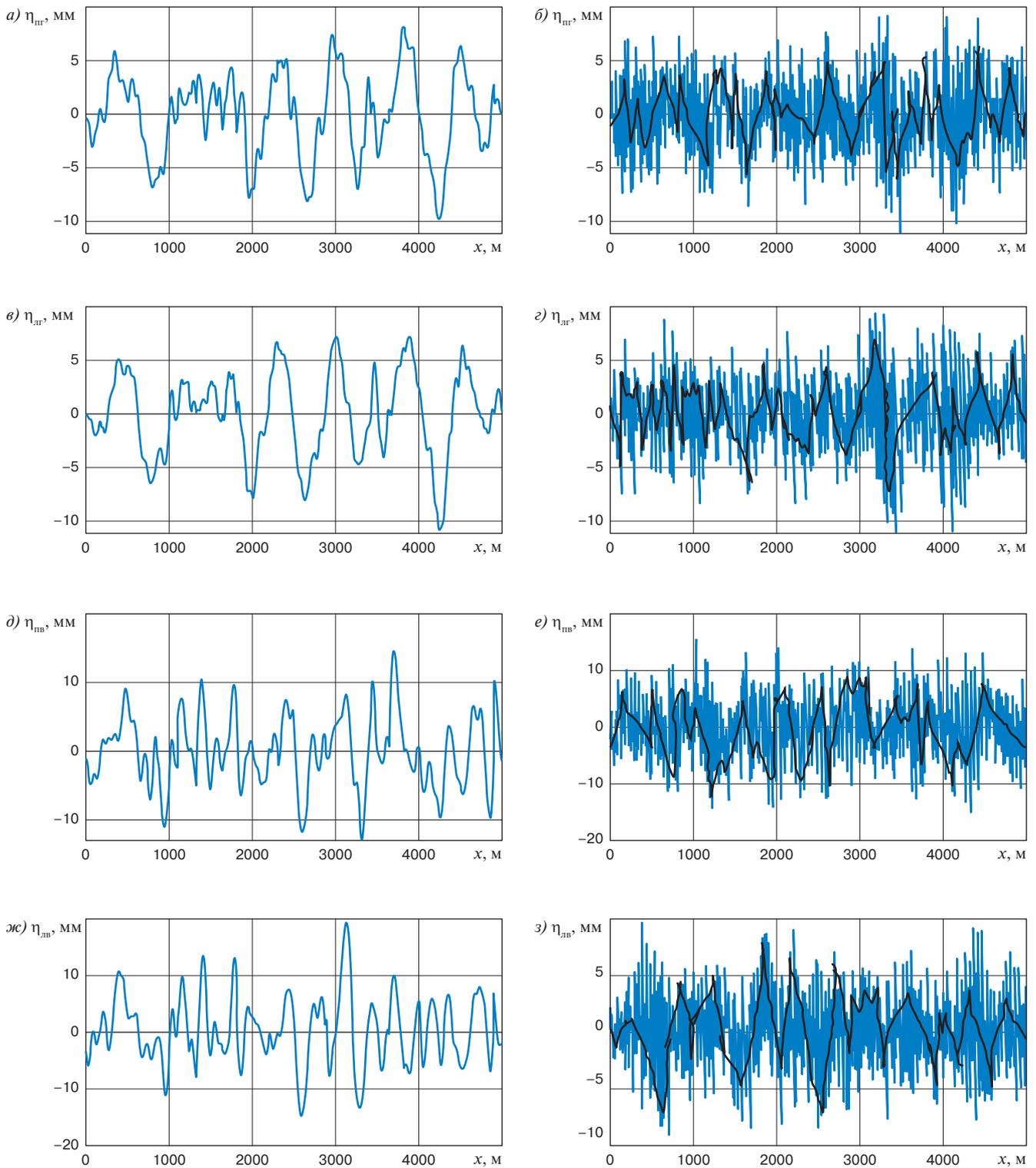


Рис. 2. Реализации случайных процессов эквивалентных геометрических вертикальных и горизонтальных неровностей левого и правого рельсов, полученные:
a, в, д, ж — по записям путеизмерительного вагона; *б, г, е, з* — по сгенерированным реализациям (черными линиями на рис. *б, г, е, з* показано изменение мгновенного среднего значения)

Fig. 2. Implementation of random equivalent geometric vertical and horizontal irregularities of the left and right rails obtained:
a, в, д, ж — from the records of the track measuring car; *б, г, е, з* — from generated implementations (the black lines in fig. *б, г, е, з* show the instantaneous average)

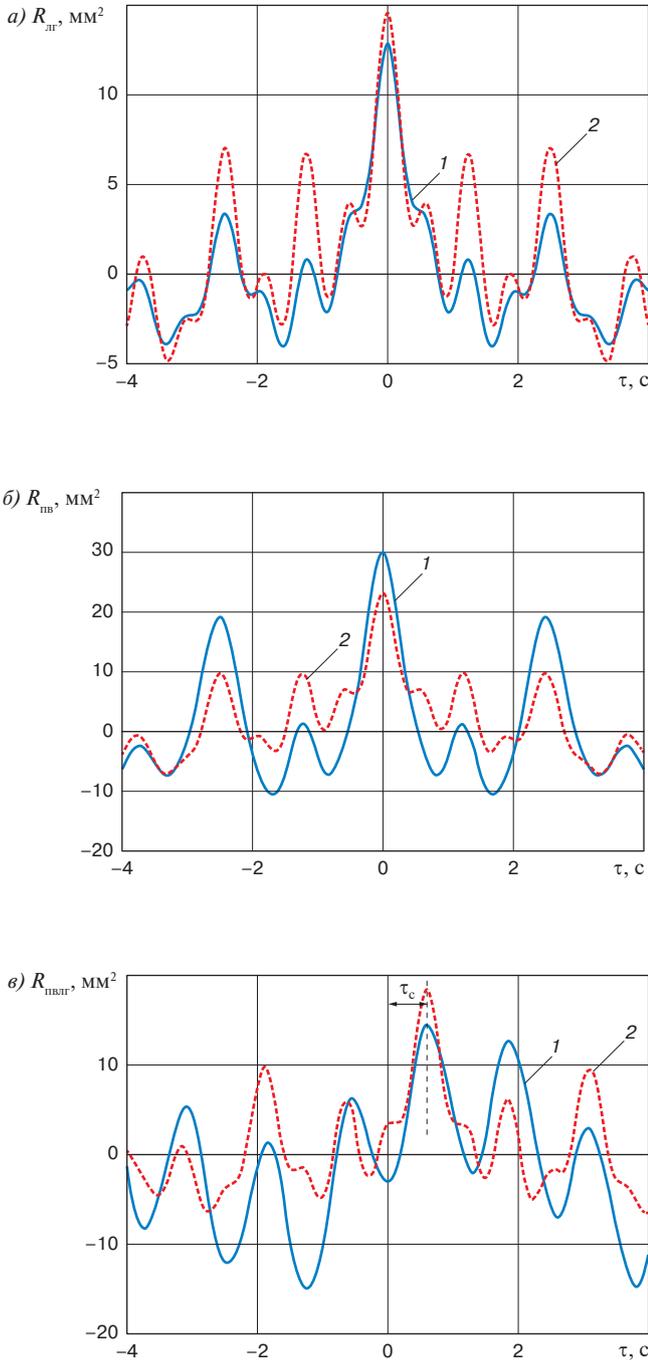


Рис. 3. Автокорреляционные функции левой горизонтальной (а) и правой вертикальной (б) неровностей рельсового пути, а также их взаимная корреляционная функция (в), найденные для скорости 20 м/с: 1 — построенные по формуле (1) по сгенерированным реализациям; 2 — построенные по аналитическим выражениям (4)–(5); τ — сдвиг

Fig. 3. Autocorrelation functions of the left horizontal (a) and right vertical (b) rail track irregularities, and their cross-correlation function (c) found for a speed of 20 m/s: 1 — plotted by Formula (1) on the generated implementations; 2 — plotted by analytical expressions (4)–(5); τ — shift

Корреляционные функции и спектральные плотности, найденные по формулам (1)–(3), были аппроксимированы аналитическими выражениями, соответствующими дифференцируемым стационарным, эргодическим случайным процессам:

$$R_{\eta_i \eta_u}(\tau_{(x)}) = S_{\eta_i} S_{\eta_u} \sum_{\nu} a_{\nu} e^{-[\alpha_{\nu}^{(*)}(\tau_{(x)} - \tau_{c(x)})]^2} \times \cos[2\pi\theta_{\nu}^{(*)}(\tau_{(x)} - \tau_{c(x)})], \quad (4)$$

где S_{η_i} и S_{η_u} — среднеквадратические отклонения случайных процессов различных неровностей; a_{ν} — доля дисперсии $S_{\eta_{i,u}}^2 = S_{\eta_i} S_{\eta_u}$, приходящаяся на ν -ю составляющую; $\alpha_{\nu} = \alpha_{\nu}^* \nu$ и $\theta_{\nu} = \theta_{\nu}^* \nu$ — коэффициент затухания и частота ν -х составляющих, [$\text{с}^{-1} = \text{м}^{-1} \cdot \text{м/с}$]; $\tau_x = \tau \nu$ — сдвиг между значениями корреляционных функций, [$\text{м} = \text{с} \cdot \text{м/с}$]; $\tau_{cx} = \tau_c \nu$ — сдвиг максимума взаимной корреляционной функции относительно начала координат, [$\text{м} = \text{с} \cdot \text{м/с}$].

Корреляционная функция по данному выражению может быть получена в функции координаты пути, если подставить значения α_{ν}^* и θ_{ν}^* в м^{-1} и τ в м , или времени, если подставить соответствующие значения в с^{-1} и с , причем при скорости $\nu = 1 \text{ м/с}$ значения этих величин совпадают.

Из этого выражения взаимных корреляционных функций (как частный случай при $i = u$ и $\tau_{c(x)} = 0$) можно получить аналитическое выражение для автокорреляционных функций:

$$R_{\eta_i(\eta_u)}(\tau_{(x)}) = S_{\eta_i(\eta_u)}^2 \sum_{\nu} a_{\nu} e^{-(\alpha_{\nu}^{(*)} \tau_{(x)})^2} \cos(2\pi\theta_{\nu}^{(*)} \tau_{(x)}), \quad (5)$$

где $S_{\eta_i(\eta_u)}^2$ — дисперсия соответствующего случайного процесса $\eta_i(x)$ или $\eta_u(x)$.

Этим корреляционным функциям соответствуют спектральные $\Phi_{\eta_i(\eta_u)}(f_x)$ и взаимные спектральные плотности $\Phi_{\eta_i \eta_u}(if_x)$, определяемые как преобразование Фурье (2) и (3) от соответствующих корреляционных и взаимных корреляционных функций. При этом аналитическое выражение спектральной плотности имеет вид

$$\Phi_{\eta_i(\eta_u)}(f_x) = \frac{S_{\eta_i(\eta_u)}^2 \sqrt{\pi}}{2} \sum_{\nu} \frac{a_{\nu}}{\alpha_{\nu}^*} \times \left\{ \exp \left[-\left(\frac{2\pi(f_x - \theta_{\nu}^*)}{4\alpha_{\nu}^*} \right)^2 \right] + \exp \left[-\left(\frac{2\pi(f_x + \theta_{\nu}^*)}{4\alpha_{\nu}^*} \right)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

В отличие от этого взаимная спектральная плотность, определяемая формулой (3), является комплексной функцией частоты [13], и ее составляющие могут быть представлены следующими выражениями [14]:

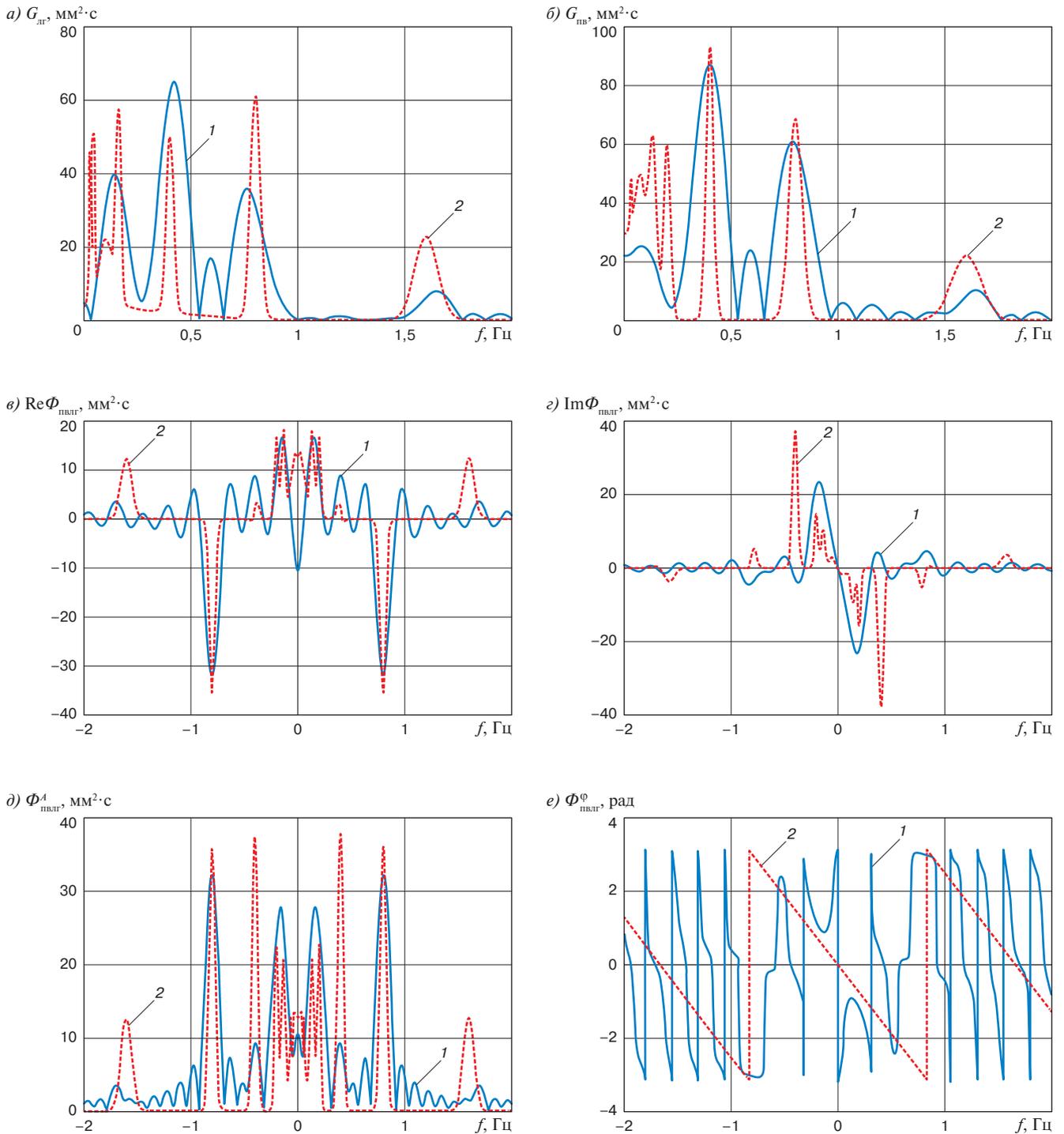


Рис. 4. Спектральные плотности левой горизонтальной (а) и правой вертикальной неровностей (б), а также составляющие их взаимной спектральной плотности — вещественная (с), мнимая (д), амплитудная (е), фазовая (е):

1 — построенные по сгенерированным реализациям; 2 — построенные по аналитическим выражениям (6)–(10)

Fig. 4. Spectral densities of the left horizontal (a) and right vertical (b) irregularities, and the components of their cross-spectral density — real (c), imaginary (d), amplitude (e), phase (e):

1 — plotted on generated implementations; 2 — plotted by analytical expressions (6)–(10)

$$\operatorname{Re} \Phi_{\eta_1 \eta_2}(j f_x) = \frac{S_{\eta_1} S_{\eta_2} \sqrt{\pi}}{2} \sum_v \frac{a_v}{\alpha_v^*} \cos(2\pi f_x \tau_{cx}) \times \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x + \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x - \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} \Phi_{\eta_1 \eta_2}(j f_x) = \frac{S_{\eta_1} S_{\eta_2} \sqrt{\pi}}{2} \sum_v \frac{a_v}{\alpha_v^*} \sin(2\pi f_x \tau_{cx}) \times \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x + \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] - \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x - \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] \right\}; \quad (8)$$

$$\Phi_{\eta_1 \eta_2}^A(f_x) = \frac{S_{\eta_1} S_{\eta_2} \sqrt{\pi}}{2} \sum_v \frac{a_v}{\alpha_v^*} \times \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x + \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{2\pi(f_x - \theta_v^*)}{4\alpha_v^*} \right)^2 \right] \right\}; \quad (9)$$

$$\Phi_{\eta_1 \eta_2}^\Phi(f_x) = \begin{cases} -2\pi\tau_{cx}f_x & \text{при } -\frac{1}{2|\tau_{cx}|} \leq f_x \leq \frac{1}{2|\tau_{cx}|}; \\ -2\pi\tau_{cx}f_x + \operatorname{sign}(\tau_{cx})(p+1)\pi & \text{при } f_x > \frac{p}{2|\tau_{cx}|}; \\ -2\pi\tau_{cx}f_x - \operatorname{sign}(\tau_{cx})(p+1)\pi & \text{при } f_x < -\frac{p}{2|\tau_{cx}|}, \end{cases} \quad (10)$$

где p — нечетное ($p = 1, 3, 5, \dots$).

Параметры аналитических выражений (5)–(10) были найдены следующим образом. Дисперсии $S_{\eta_1(\eta_2)}^2$ или среднеквадратические отклонения $S_{\eta_1(\eta_2)}$, а также сдвиг τ_{cx} определялись по графикам авто- и взаимных корреляционных функций (рис. 3), в то же время частота θ_v^* — по графикам спектральных плотностей и их амплитудных составляющих (рис. 4).

Величины a_v и α_v^* определялись на основе минимизации при всех частотах $i_f = 0, 1, 2, \dots, N_f$; суммы квадратов отклонений значений нормированных расчетных $\phi_p(f_{i_f x}) = \Phi_p(f_{i_f x})/S_p^2$ от экспериментальных спектральных плотностей $\phi_3(f_{i_f x}) = \Phi_3(f_{i_f x})/S_3^2$ по методу наименьших квадратов [15]:

$$\sum_{i_f=1}^{N_f} [\phi_p(f_{i_f x}) - \phi_3(f_{i_f x})]^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

При этом нулевые приближения для a_v определялись непосредственно по графикам спектральной

плотности (6) и амплитудной составляющей взаимной спектральной плотности (9), а для α_v^* находились как половина ширины v -го максимума $\phi_3(f_{i_f x})$ на уровне половины его высоты.

Экспериментально полученные спектральные и взаимные спектральные плотности были дополнены составляющими с более высокими частотами $f_x = 0,01 \div 0,08 \text{ м}^{-1}$, соответствующими меньшим длинам волн $L_b = \frac{1}{f_x} = 12,5 \div 100 \text{ м}$. Для их определения

были выделены отдельные отрезки реализаций, где проявились такие частоты, и был выполнен корреляционный и спектральный анализ, который учел присутствие таких составляющих. Отметим, что для обеспечения необходимого частотного диапазона возмущений большая часть дисперсии (не менее 80%) должна приходиться на неровности с короткими длинами волн (до 150 м включительно).

В результате были получены параметры десяти аналитических выражений вероятностных характеристик случайных процессов неровностей рельсового пути, содержащих по 11–14 слагаемых каждая, необходимые для генерации многомерного случайного процесса возмущения рельсовых экипажей (4 авто и 6 взаимных). Эти составляющие соответствуют полной симметричной матрице корреляционных функций:

$$\mathbf{R}_{\eta_1 \eta_2}(\tau) = \begin{vmatrix} R_{\eta_1, \eta_1} & R_{\eta_1, \eta_2} & R_{\eta_1, \eta_3} & R_{\eta_1, \eta_4} \\ R_{\eta_2, \eta_1} & R_{\eta_2, \eta_2} & R_{\eta_2, \eta_3} & R_{\eta_2, \eta_4} \\ R_{\eta_3, \eta_1} & R_{\eta_3, \eta_2} & R_{\eta_3, \eta_3} & R_{\eta_3, \eta_4} \\ R_{\eta_4, \eta_1} & R_{\eta_4, \eta_2} & R_{\eta_4, \eta_3} & R_{\eta_4, \eta_4} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

по главной диагонали которой расположены автокорреляционные функции, а остальные элементы являются взаимными корреляционными функциями, причем $R_{\eta_1 \eta_2}(\tau) = R_{\eta_2 \eta_1}(-\tau)^{11}$.

Для примера в табл. 1 приведены параметры аналитических выражений, найденные для $R_{\text{лг}}(\tau_x)$, $R_{\text{пв}}(\tau_x)$ и $R_{\text{пвлг}}(\tau_x)$. Как видно из табл. 1, полученные параметры автокорреляционной функции левой горизонтальной неровности $R_{\text{лг}}$ содержат 14 слагаемых, соответствующих длинам волн $L_{\text{бв}}$ от 12,5 до 850 м, параметры автокорреляционной функции правой вертикальной неровности $R_{\text{пв}}$ — 12 слагаемых, соответствующих длинам волн $L_{\text{бв}}$ от 12,5 до 825 м, а параметры их взаимной корреляционной функции $R_{\text{пвлг}}$ — 12 слагаемых, соответствующих длинам волн $L_{\text{бв}}$ от 12,5 до 900 м. Такой диапазон длин волн обеспечивает необходимый диапазон частот возмущения при исследовании колебаний рельсовых экипажей.

¹¹ Вентцель Е. С. Теория вероятностей. С. 185.

Таблица 1

Параметры аналитических выражений автокорреляционных $R_{лг}(\tau_x)$, $R_{нв}(\tau_x)$ и взаимной корреляционной $R_{нвлг}(\tau_x)$ функций

Table 1

Parameters of analytical expressions of autocorrelation $R_{лг}(\tau_x)$, $R_{нв}(\tau_x)$ and cross-correlation $R_{нвлг}(\tau_x)$ functions

Номер составляющей ν	Доля дисперсии a_ν	Нормированный коэффициент затухания α_ν^* , м^{-1}	Нормированная частота θ_ν^* , м^{-1}	Длина волны неровности $L_{нв}$, м
$R_{лг}(S_{лг}^2 = 14,6 \text{ мм}^2; \tau_{сх} = 0 \text{ м})$				
1	0,0066	0,000368	0,00118	850
2	0,02981	0,001306	0,00148	675
3	0,003979	0,0001546	0,00174	575
4	0,001342	0,0001702	0,0021	475
5	0,028	$8,323 \cdot 10^{-4}$	0,00235	425
6	$1,282 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	0,00267	375
7	$7,249 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0,00286	350
8	$3,971 \cdot 10^{-5}$	$1,006 \cdot 10^{-6}$	0,0033	300
9	0,1014	0,007	0,005	200
10	0,10966	0,002746	0,008	125
11	0,1229	0,07149	0,01	100
12	0,14264	0,003857	0,02	50
13	0,2405	0,00512	0,04	25
14	0,213	0,012	0,08	12,5
$R_{нв}(S_{нв}^2 = 23,1 \text{ мм}^2; \tau_{сх} = 0 \text{ м})$				
1	0,0011	0,0002099	0,0012	825
2	0,003923	0,0005352	0,0016	625
3	0,07083	0,01	0,0021	475
4	$3,968 \cdot 10^{-5}$	0,0002929	0,0025	400
5	$6,629 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	0,0031	325
6	0,0797	0,009729	0,0033	300
7	0,05195	$4,772 \cdot 10^{-3}$	0,004	250
8	0,1038	0,00389	0,0067	150
9	0,10212	0,003512	0,01	100
10	0,17928	0,003931	0,02	50
11	0,2394	0,007128	0,04	25
12	0,16775	0,01548	0,08	12,5
$R_{нвлг}(S_{нв} S_{лг} = 18,4 \text{ мм}^2; \tau_{сх} = 12,025 \text{ м})$				
1	0,06725	0,007158	0,0011	900
2	0,01529	0,003163	0,0016	625
3	0,001859	0,0007134	0,002	500
4	0,0001053	0,0001101	0,00235	425
5	0,009694	0,0009628	0,0031	325
6	0,009224	0,001948	0,004	250
7	$2,221 \cdot 10^{-5}$	$6,35 \cdot 10^{-4}$	0,005	200
8	0,1089	0,004281	0,0067	150
9	0,098	$3,5 \cdot 10^{-3}$	0,01	100
10	0,2443	0,005249	0,02	50
11	0,27	0,0061	0,04	25
12	0,17533	0,011155	0,08	12,5

Метод и результаты генерации случайных процессов неровностей рельсов. По найденным значениям параметров была выполнена генерация случайных процессов неровностей с использованием импульсной характеристики формирующего фильтра¹² [3, 4]. Поскольку решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания рельсовых экипажей, выполняется в функции времени $t = x/v$, то при исследованиях случайных колебаний рельсовых экипажей необходимо по вероятностным характеристикам реализаций $\|\eta(x = vt)\|$ выполнять генерацию реализаций $\|\eta(t = x/v)\|$ для различных скоростей движения.

Схема генерации многомерного случайного процесса неровностей пути во временной области (рис. 4), предложенная в [3, 4], включает в себя пять генераторов белого шума¹³. Четыре генератора (ГШ1–ГШ4) формируют последовательности дискретных псевдослучайных чисел $y(nT)$, распределенные по нормальному закону. Здесь $T = 0,01$ с — шаг дискретизации, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ — количество шагов ($N = 4096$ для обеспечения длительности реализации $NT = 40,96$ с). Пятый генератор (ГШ5) задает исходные начальные случайные числа для ГШ1–ГШ4.

Для реализации этой схемы генерации случайных процессов по принятым аналитическим выражениям авто- и взаимных корреляционных функций с параметрами $S_{\eta_i(\eta_w)}$, α_v , α_v^* и θ_v^* определялись импульсные характеристики формирующего фильтра при заданной скорости движения v , м/с¹⁴ [4]:

$$k_{\eta_i(\eta_w)}(nT) = S_{\eta_i(\eta_w)} \sum_v a_v e^{-(\alpha_v nT)^2} \cos(2\pi\theta_v nT); \quad (13)$$

$$k_{\eta_i\eta_w}(nT) = \sqrt{S_{\eta_i} S_{\eta_w}} \sum_v a_v e^{-[\alpha_v(n-n_c)T]^2} \cos[2\pi\theta_v(n-n_c)T],$$

где $\alpha_v = \alpha_v^* v$, $\theta_v = \theta_v^* v$, $\tau = nT$ и $\tau_c = n_c T$.

Сигналы с выходов ГШ1–ГШ4 в блоках $k_{i,j}$ умножают на значения соответствующих импульсных характеристик и далее вычисляют интеграл Дюамеля, представляющий собой свертку двух функций [8, 11]:

$$\int_0^\infty u(\tau) d\tau = \sum_{n_c T} k_{\eta_i(\eta_w)}[(n-n_c)T] y(nT). \quad (14)$$

Для получения многомерного случайного процесса неровности $\eta_x(t)$ в каждый момент времени складывались результаты четырех свертки (14) — одной с импульсной характеристикой, параметры которой соответствуют автокорреляционной функции искомой неровности рельсового пути, других с импульсными

характеристиками, параметры которых соответствуют взаимным корреляционным функциям этой неровности с тремя другими.

Рассмотрим несколько примеров генерации случайных процессов $\|\eta[t = (x/v)]\|$ с параметрами, приведенными в таблице, выполненных для решения следующих задач:

- проверки сходимости графиков сгенерированных реализаций случайных процессов неровностей (рис. 2, б) с исходными реализациями (рис. 2, а);
- проверки сходимости графиков вероятностных характеристик, построенных по формулам (1)–(3) для сгенерированных реализаций с аналогичными графиками, построенными по аналитическим выражениям (4)–(5) для заданной скорости движения v , м/с (рис. 3 и 4);
- анализа влияния скорости движения на характер сгенерированных реализаций и их вероятностные характеристики.

Для проверки сходимости экспериментальных (рис. 2, а) и сгенерированных реализаций случайных процессов $\eta_x(t)$ генерация этих процессов выполнялась по значениям параметров соответствующих аналитических выражений, приведенных в табл. 1. Графики сгенерированных реализаций $\eta_x(x)$ (рис. 2, б) имеют удовлетворительную сходимость с графиками, построенными по экспериментальным данным (рис. 2, а). Эти графики (рис. 2, б) также имеют вид случайных колебаний с нулевыми средними значениями и стабильными размахами. Поэтому в первом приближении их также можно рассматривать как реализации эргодических стационарных случайных процессов. Вместе с тем в графиках сгенерированных процессов имеются составляющие с более высокими частотами, которые были получены по дополнительным реализациям для обеспечения необходимого диапазона частот возмущения.

На рис. 3 приведены автокорреляционные функции левой горизонтальной $R_{rr}(\tau)$ и правой вертикальной $R_{vv}(\tau)$ неровностей, а также их взаимная корреляционная функция $R_{rv}(\tau)$. Как видно из этого рисунка, полученные графики содержат несколько затухающих косинусоидальных составляющих. Затухание этих графиков свидетельствует о том, что для исследуемых случайных процессов выполняются условия стационарности и эргодичности¹⁵ [3]. Кроме того, максимум взаимной корреляционной функции сдвинут на величину τ_c относительно начала координат.

Графики корреляционных функций, построенные по сгенерированным реализациям (рис. 3, кривые 1), показывают удовлетворительную сходимость

¹² Акишин А. А. Указ. соч. С. 60.

¹³ Там же.

¹⁴ Там же.

¹⁵ Вентцель Е. С. Теория вероятностей. С. 421; Механическая часть тягового подвижного состава. С. 54.

с теоретическими графиками, построенными по аналитическим выражениям (4) – (5) (рис. 3, кривые 2).

По корреляционным функциям путем численного преобразования Фурье были найдены спектральные плотности $G_{лг}(f)$ и $G_{пв}(f)$, а также составляющие взаимной спектральной плотности $\Phi_{пвлг}(jf)$ (рис. 4).

Как видно из рис. 4 (а–д), графики спектральных плотностей исследуемых процессов, как и корреляционные функции (рис. 3), состоят из ряда слагаемых. Отметим, что графики, построенные по формулам (2) и (3) – линии 1, также показывают удовлетворительную сходимость с графиками, построенными по аналитическим выражениям (6) – (10) – линии 2, так как их максимумы приходятся на одинаковые частоты. При этом из составляющих взаимной спектральной плотности наилучшую сходимость показал график амплитудной составляющей $\Phi_{пвлг}^A(f)$.

Упрощение генерации случайного процесса возмущения с помощью импульсной характеристики. Выполним упрощение метода генерации случайных процессов возмущения (рис. 5), предложенного в работах [3, 4]. Для этого выполним такую генерацию в функции координаты, где шаг дискретизации по координате постоянен $X = 0,185$ м. В этом случае для нахождения импульсных характеристик используем параметры α_v^* и θ_v^* (1/м), не зависящие от скорости движения, и импульсные характеристики формирующего фильтра не будут зависеть от скорости движения:

$$k_{\eta_i(\eta_u)}(nX) = S_{\eta_i(\eta_u)} \sum_v a_v e^{-\alpha_v^* nX} \cos(2\pi\theta_v^* nX); \quad (15)$$

$$k_{\eta_i\eta_u}(nX) = \sqrt{S_{\eta_i} S_{\eta_u}} \sum_v a_v e^{-\alpha_v^* (n-n_c)X} \times \times \cos[2\pi\theta_v^* (n-n_c)X]. \quad (16)$$

В результате генерации получаются реализации многомерных неровностей пути в функции координаты $\|\eta_{i,j}(x = vt)\|$. Затем, в отличие от работ [3, 4], не будем выполнять процедуры генерации случайных процессов $\|\eta_{i,j}(t = x/v)\|$ для каждой из заданных скоростей. Вместо этого выполним пересчет полученных реализаций $\|\eta_{i,j}(x)\|$ на реализации $\|\eta_{i,j}(t)\|$, заменяя в сгенерированных реализациях $\|\eta_{i,j}(x)\|$ координату $x = nX$, ($n=1, 2, 3, \dots, N$) на координату $t = nX/v$ для каждой заданной скорости движения v .

Проведем оценку применимости данного упрощенного метода, сравнив результаты генерации с реализациями, сгенерированными по ранее предложенному методу [3, 4], для различных скоростей движения (рис. 6, 7, 8). При этом по новому способу была сгенерирована одна реализация в функции координаты x , для которой пересчитывался шаг дискретизации по времени $T = X/v$ для каждой выбранной

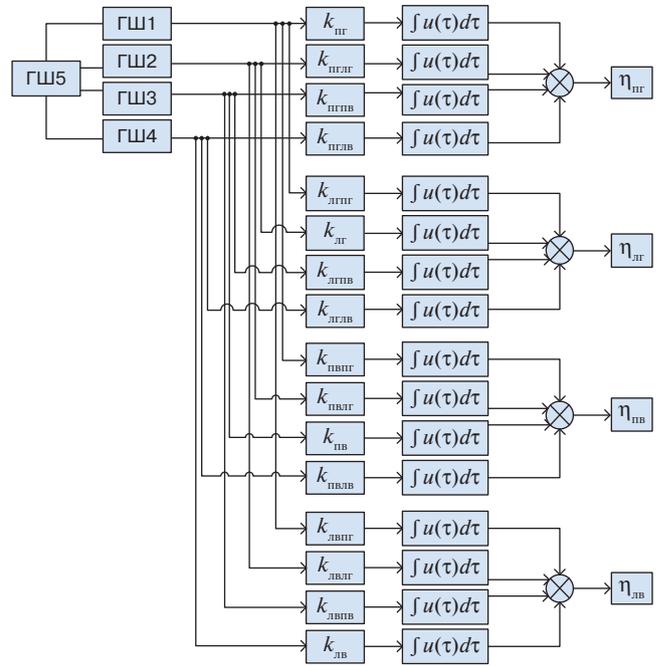


Рис. 5. Схема генератора многомерного случайного процесса возмущения:

ГШ1 – ГШ4 – генераторы последовательности дискретных псевдослучайных чисел; ГШ5 – генератор исходных начальных случайных чисел для ГШ1 – ГШ4; k – импульсная характеристика; η – геометрическая неровность рельсового пути, пг – горизонтальная правого рельса, лг – горизонтальная левого рельса, пв – вертикальная правого рельса, лв – вертикальная левого рельса

Fig. 5. Multivariate random disturbance process generator diagram: ГШ1 – ГШ4 – discrete pseudorandom number sequence generators; ГШ5 – initial random number generator for ГШ1 – ГШ4; k – impulse response; η – rail track geometric irregularity; пг – right rail horizontal; лг – left rail horizontal; пв – right rail vertical; лв – left rail vertical

скорости. Так, для скорости 20 м/с этот шаг составил $T = 0,00925$ с, для скорости 60 м/с – $T = 0,0031$ с, а для скорости 120 м/с – $T = 0,0015$ с.

При этом реализация случайного процесса правой вертикальной неровности (рис. 6, б; рис. 7, б; рис. 8, б), сгенерированная по новому, упрощенному методу, так же как и реализация, сгенерированная по ранее предложенному методу, имеет вид случайного колебания с нулевым средним значением и стабильным размахом. Поэтому в первом приближении эти процессы также можно рассматривать как реализации эргодических стационарных случайных процессов. Спектральные плотности $G_{пв}(f)$ (рис. 6, в; рис. 7, в; рис. 8, в, поз. 2), вычисленные для реализации, сгенерированной упрощенным способом, при каждой из заданных скоростей движения, показали удовлетворительную сходимость со спектральными плотностями $G_{пв}(f)$ (рис. 6, в; рис. 7, в; рис. 8, в, поз. 1), вычисленными для реализаций,

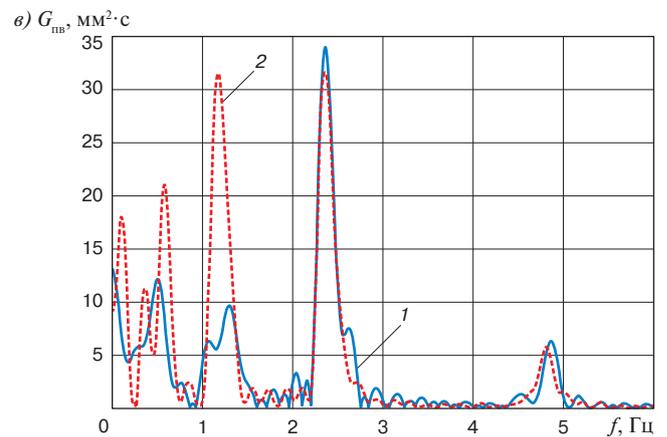
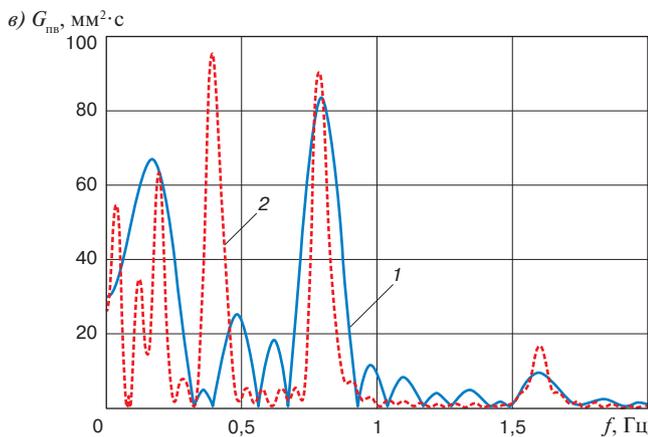
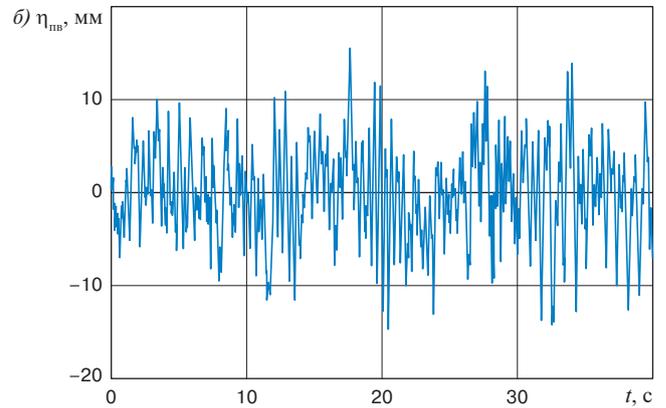
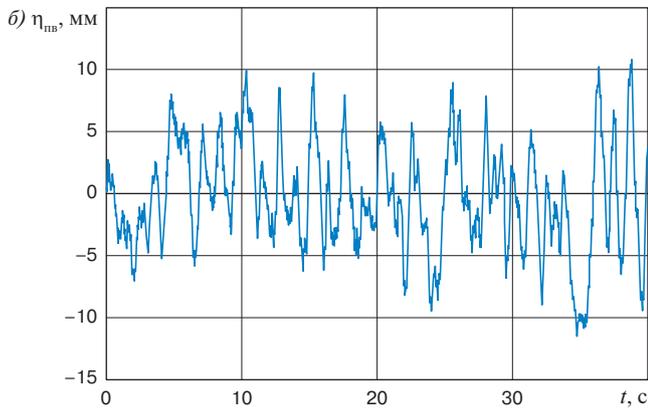
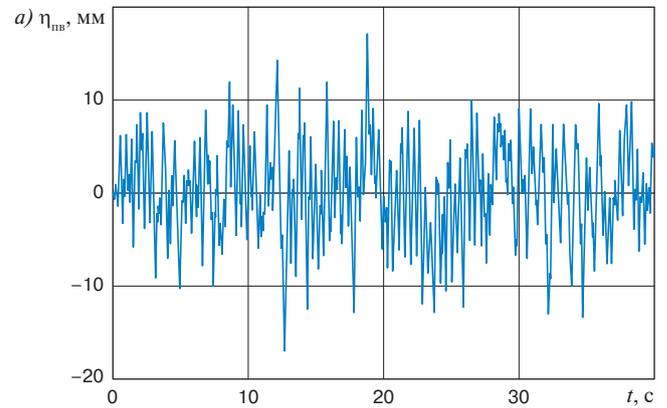
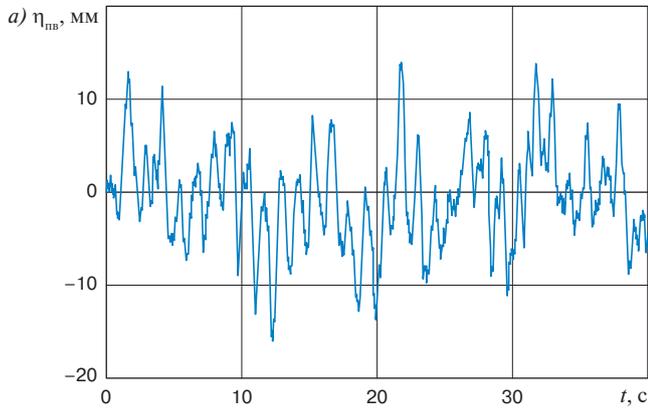


Рис. 6. Графики, полученные для неровности правого рельса при скорости 20 м/с:

a — реализации, сгенерированные ранее предложенным способом генерации; *б* — реализации, сгенерированные упрощенным способом генерации; *в* — спектральные плотности: *1* — полученные для реализации, сгенерированной ранее предложенным способом; *2* — полученные для реализации, сгенерированной упрощенным способом

Fig. 6. Graphs for the right rail irregularities at 20 m/s:
a — implementations generated by previous methods;
б — implementations generated by the simplified method;
в — spectral densities: *1* — for implementations generated by previous methods; *2* — for implementations generated by the simplified method

Рис. 7. Графики, полученные для неровности правого рельса при скорости 60 м/с:

a — реализации, сгенерированные ранее предложенным способом генерации; *б* — реализации, сгенерированные упрощенным способом генерации; *в* — спектральные плотности: *1* — полученные для реализации, сгенерированной ранее предложенным способом; *2* — полученные для реализации, сгенерированной упрощенным способом

Fig. 7. Graphs for the right rail irregularities at 60 m/s:
a — implementations generated by previous methods;
б — implementations generated by the simplified method;
в — spectral densities: *1* — for implementations generated by previous methods; *2* — for implementations generated by the simplified method

сгенерированных ранее предложенным в работах [3, 4] способом, так как при одинаковых скоростях движения в реализациях проявляются одни и те же составляющие спектральных плотностей. При этом, как показывают графики, сходимость спектральных плотностей улучшается с ростом скорости движения.

Таким образом, новый, упрощенный способ генерации целесообразно использовать при решении задач динамики рельсовых экипажей, так как значительно упрощается процедура задания возмущений для исследования колебаний нелинейных систем. Это обусловлено тем, что можно использовать множество однократно сгенерированных реализаций неровностей в функции координаты $\|\eta_{i,j}(x)\|$, вместо того чтобы генерировать такие множества для каждой скорости движения.

Также отметим, что с увеличением скорости движения возрастают частоты возмущений $f = f_x v$ и меняется вид графиков реализаций и спектральных плотностей: они становятся более высокочастотными. Например, при скорости движения $v = 20$ м/с в графике спектральной плотности присутствуют частоты до 1,6 Гц, которые влияют на вертикальные колебания кузова подвижного состава, частота собственных колебаний которого составляет 1,3–1,5 Гц (рис. 6).

При скорости движения $v = 60$ м/с диапазон частот графика $G_{пв}(f)$ расширяется уже до 4,8 Гц и будет влиять на колебания кузова и тележек (рис. 7). При скорости $v = 120$ м/с высокие частоты графиков $G_{пв}(f)$ достигают значений 9,6 Гц и превышают собственные частоты вертикальных колебаний тележек (рис. 8). Этот анализ наглядно показывает необходимость отдельного формирования возмущений для различных скоростей движения.

Кроме того, определенный интерес представляет и анализ длин волн неровностей L_b , которые можно определить как $L_b = v/f$. Диапазон частот и соответствующих длин волн для сгенерированных реализаций возмущения приведен в табл. 2 и показывает следующее. Высшим частотам спектральных плотностей при всех скоростях движения соответствует длина

Таблица 2

Диапазоны частот и длин волн неровностей для различных скоростей движения

Table 2

Irregularities wavelength and frequency ranges for different speed movements

Скорость движения, м/с	Диапазон частот, Гц	Диапазон длин волн, м
20	0,2÷1,6	100÷12,5
60	0,2÷4,8	300÷12,5
120	0,2÷9,6	600÷12,5

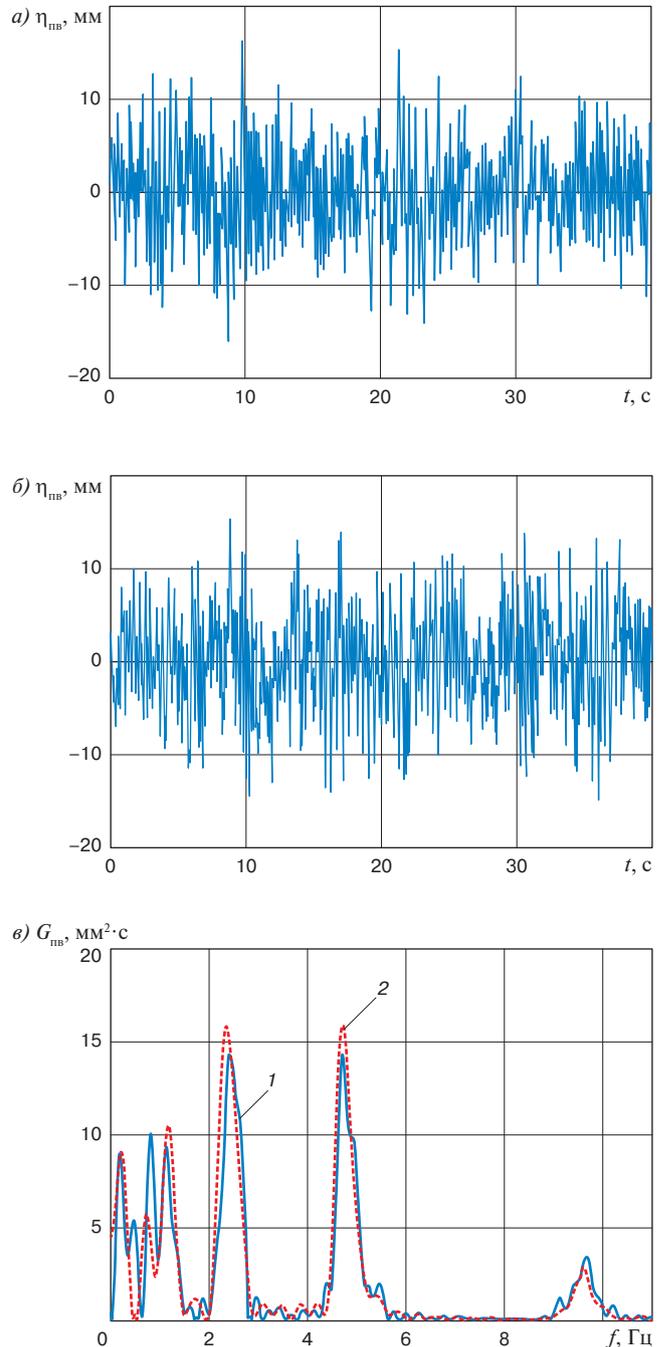


Рис. 8. Графики, полученные для неровности правого рельса при скорости 120 м/с:

a — реализации, сгенерированные ранее предложенным способом генерации; *б* — реализации, сгенерированные упрощенным способом генерации; *в* — спектральные плотности: *1* — полученные для реализации, сгенерированной ранее предложенным способом; *2* — полученные для реализации, сгенерированной упрощенным способом

Fig. 8. Graphs for the right rail irregularities at 120 m/s: *a* — implementations generated by previous methods; *б* — implementations generated by the simplified method; *в* — spectral densities: *1* — for implementations generated by previous methods; *2* — for implementations generated by the simplified method

волны 12,5 м. Вместе с тем низшей частоте $G_{\text{пв}}(f)$ соответствуют длины волн, изменяющиеся с ростом скорости от 100 м при $v = 20$ м/с и до 600 м при $v = 120$ м/с.

Этот анализ также подтверждает необходимость формирования возмущений для различных скоростей движения.

Обсуждение и заключение. При использовании для анализа длительных (свыше 14 км) реализаций случайных процессов геометрических неровностей рельсового пути, записанных вагонами-путьеизмерителями, обеспечивается возможность получения достоверных результатов, которые могут быть применены для генерирования неровностей. Предложенные аналитические выражения для аппроксимации авто- и взаимных корреляционных функций, а также функций спектральной и взаимной спектральной плотности эквивалентных геометрических неровностей пути учитывают специфику исследуемых процессов. Графики, построенные по их аналитическим выражениям, обеспечивают удовлетворительную сходимость с графиками характеристик, построенными по результатам численного вероятностного анализа сгенерированных случайных процессов неровностей. Полученные при аппроксимации параметры вероятностных характеристик возмущений могут быть использованы для генерации многомерных эквивалентных геометрических неровностей, учитывающих инерционные и упруго-диссипативные свойства рельсового пути. Такие процессы могут быть использованы в качестве возмущений в моделях колебаний рельсовых экипажей, движущихся по абсолютно жесткому пути. Упрощенный способ генерации возмущений в функции координаты x показал удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными и с результатами генерации ранее предложенным способом. Он может быть эффективно использован при решении задач динамики рельсовых экипажей, в том числе для сложных нелинейных систем. Применение данного способа не требует генерации новых реализаций неровностей для каждой заданной скорости движения, что существенно сокращает затраты машинного времени на моделирование.

Финансирование: авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

Funding: the authors received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов и не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest and no financial interests in any material discussed in this article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Кудрявцев Н. Н. Исследование динамики необрессоренных масс вагонов. М.: Транспорт, 1965. 168 с. [Kudryavtsev N. N. *A study in the dynamics of unsprung masses of carriages*. Moscow: Transport Publ.; 1965. 168 p. (In Russ.)].
2. Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М.: Транспорт, 1997. 325 с. [Kogan A. Ya. *Railway track dynamics and its interaction with rolling stock*. Moscow: Transport Publ.; 1997. 325 p. (In Russ.)].
3. Савоськин А. Н., Бурчак Г. П., Бондаренко Д. А. Вероятностные методы в задачах динамики, прочности и безотказности рельсовых экипажей. М.: Альянс, 2022. 612 с. [Savos'kin A. N., Burchak G. P., Bondarenko D. A. *Probabilistic methods in problems of dynamics, strength and failure-free operation of rail cabs*. Moscow: Al'yans Publ.; 2022. 612 p. (In Russ.)]. EDN: <https://elibrary.ru/uuxpuw>.
4. Акишин А. А., Савоськин А. Н. Генерация многомерного случайного процесса возмущений в задачах динамики подвижного состава железных дорог // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика, телекоммуникация и управление. 2015. № 2–3 (217–222). С. 71–78 [Akishin A. A., Savos'kin A. N. Generating a Multidimensional Perturbed Stochastic Process in Railways Rolling Stock Dynamics. *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computing Telecommunication and Control*. 2015;(2-3):71-78. (In Russ.)]. <https://doi.org/10.5862/JCSTCS.217-222.6>
5. Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М.: ИПП «Куна», 2023. 280 с. [Kogan A. Ya. *Railway track dynamics and its interaction with rolling stock*. Moscow: IPP “Kuna”; 2023. 280 p. (In Russ.)]. EDN: <https://elibrary.ru/mdkaov>.
6. Коган А. Я., Загитов Э. Д., Полешчук И. В. Случайные процессы взаимодействия пути и подвижного состава. М.: РАС, 2016. 208 с. [Kogan A. Ya., Zagitov E. D., Poleshchuk I. V. *Random processes of interaction between track and rolling stock*. Moscow: RAS Publ.; 2016. 208 p. (In Russ.)]. EDN: <https://elibrary.ru/xcajob>.
7. Савоськин А. Н., Лавлинская Н. С. Проверка адекватности методики генерации случайного процесса возмущения колебаний рельсовых экипажей по импульсной характеристике формирующего фильтра // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта (Вестник ВНИИЖТ). 2020. Т. 79, № 6. С. 327–336 [Savos'kin A. N., Lavlinskaya N. S. Checking the adequacy of the method for generating a random process of disturbance of oscillations of rail carriages to the impulse response of the forming filter. *Russian Railway Science Journal*. 2020;79(6):327-336. (In Russ.)]. <https://doi.org/10.21780/2223-9731-2020-79-6-327-336>.
8. Матыаш И., Шилханек Я. Генератор случайных процессов с заданной матрицей спектральных плотностей // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. XXI. № 1. С. 29–35 [Matyash J., Shilkhanek Ya. Generator of random processes with given matrix of spectral densities. *Avtomatika i telemekhanika*. 1960;21(1):29-35. (In Russ.)].
9. Бендат Дж. С., Пирсол А. Дж. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 464 с. [Bendat Ju. S., Piersol A. G. *Measurement and analysis of random data*. Moscow: Mir Publ.; 1974. 464 p. (In Russ.)].
10. Xu L., Zhao Y., Li Zh., Yan B., Chen W. Random vibration analysis for train–track interaction from the aspect of uncertainty quantification. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2021;66:103158. <https://doi.org/10.1016/j.probenmech.2021.103158>.
11. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. В. Ф. Писаренко; предисл. А. М. Яглома. М.: Мир, 1972. Т. 2. 287 с. [Jenkins G., Watts D. *Spectral analysis and its applications*. Moscow: Mir Publ.; 1972. Vol. 2. 287 p. (In Russ.)].
12. Alotta G., Di Paola M., Pinnola F. P. Cross-correlation and cross-power spectral density representation by complex spectral moments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017;94:20-27. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.001>.

13. Di Paola M., Pinnola F. P. Riesz fractional integrals and complex fractional moments for the probabilistic characterization of random variables. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2012;29:149-156. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2011.11.003>.

14. Savoskin A., Lavlinskaya N. Spectral and cross-spectral densities expressions' refinement for rail vehicle oscillations. In: Tanaino I., Dzholdosheva T. (eds.) *E3S Web of Conferences. Vol. 402: International Scientific Siberian Transport Forum "TransSiberia 2023", 16–19 May 2023, Novosibirsk*. [s. l.]; 2023. p. 06001. <https://doi.org/10.1051/e3s-conf/202340206001>.

15. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. 2-е изд., доп. и испр. М.: Физматгиз, 1962. 349 с. [Linnik Yu. V. *The least squares method and the mathematical statistical theory fundamentals of observation processing*. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1962. 349 p. (In Russ.)].

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий Николаевич САВОСЬКИН,

д-р техн. наук, профессор, кафедра электропоездов и локомотивов, Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), Author ID: 528727, <https://orcid.org/0000-0001-9777-7235>

Наталья Сергеевна ЛАВЛИНСКАЯ,

аспирант, кафедра электропоездов и локомотивов, Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), <https://orcid.org/0000-0003-0937-3906>

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoliy N. SAVOSKIN,

Dr. Sci. (Eng.), Professor, Electric Trains and Locomotives Department, Russian University of Transport (127994,

Moscow, 9, bldg. 9, Obraztsova St.), Author ID: 528727, <https://orcid.org/0000-0001-9777-7235>

Nataliya S. LAVLINSKAYA,

Postgraduate, Electric Trains and Locomotives Department, Russian University of Transport (127994, Moscow, 9, bldg. 9, Obraztsova St.), <https://orcid.org/0000-0003-0937-3906>

ВКЛАД АВТОРОВ

Анатолий Николаевич САВОСЬКИН. Постановка целей и задач исследования, общее руководство исследованием, написание текста статьи (50 %).

Наталья Сергеевна ЛАВЛИНСКАЯ. Выполнение расчетов и редактирование текста статьи (50 %).

CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

Anatoliy N. SAVOSKIN. Setting research goals and objectives, general research management, article writing (50%).

Nataliya S. LAVLINSKAYA. Calculations and article editing (50%).

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

The authors have read and approved the final manuscript.

Статья поступила в редакцию 27.07.2023, рецензия от первого рецензента получена 04.08.2023, рецензия от второго рецензента получена 18.08.2023, принята к публикации 10.12.2023.

The article was submitted 27.07.2023, first review received 04.08.2023, second review received 18.08.2023, accepted for publication 10.12.2023.

ПОДПИСКА

«Вестник ВНИИЖТ» ГДЕ подписаться?

Подписку на научно-технический журнал «Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта» («Вестник ВНИИЖТ») можно оформить в любом почтовом отделении связи по Объединенному каталогу «Пресса России», том 1 или агентствах по распространению печатных изданий «Урал-Пресс», АРЗИ и др.

Подписной индекс журнала — 70116.

Также можно оформить подписку (годовую и полугодовую) на договорных условиях в редакции. Адрес редакции журнала: 129626, Москва, 3-я Мытищинская ул., д. 10, тел.: +7 (495) 602-84-56, e-mail: journal@vniizht.ru. Информация о подписке размещена на сайте журнала www.journal-vniizht.ru.

Подписчики стран ближнего и дальнего зарубежья могут оформить подписку на журнал «Вестник ВНИИЖТ» в агентстве «Урал-Пресс» (Ural-Press, export@ural-press.ru).